

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DE PROvence

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

FRANCOIS WERKOFF

EFFETS DES COLLISIONS COULOMBIENNES SUR LE CONFINEMENT
DE PLASMAS PAR DES CONFIGURATIONS MAGNETIQUES A MIROIRS

Soutenue le 5 Février 1973 devant la Commission d'Examen

M.M. A. VISCONTI

Président

S. BLIMAN

T. CONSOLI

C. WATSON

} Examineurs

THESE

PRESENTEE A

L'UNIVERSITE DE PROVENCE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

FRANCOIS WERKOFF

EFFETS DES COLLISIONS COULOMBIENNES SUR LE CONFINEMENT
DE PLASMAS PAR DES CONFIGURATIONS MAGNETIQUES A MIROIRS

Soutenue le 5 Février 1973 devant la Commission d'Examen

M.M. A. VISCONTI

Président

S. BLIMAN

T. CONSOLI

C. WATSON

}
Examineurs

REMERCIEMENTS.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur A. VISCONTI qui m'a fait l'honneur de patronner ma thèse.

Je remercie Monsieur T. CONSOLI qui a bien voulu m'accueillir dans son Laboratoire et dont l'intérêt pour ce travail a été constant.

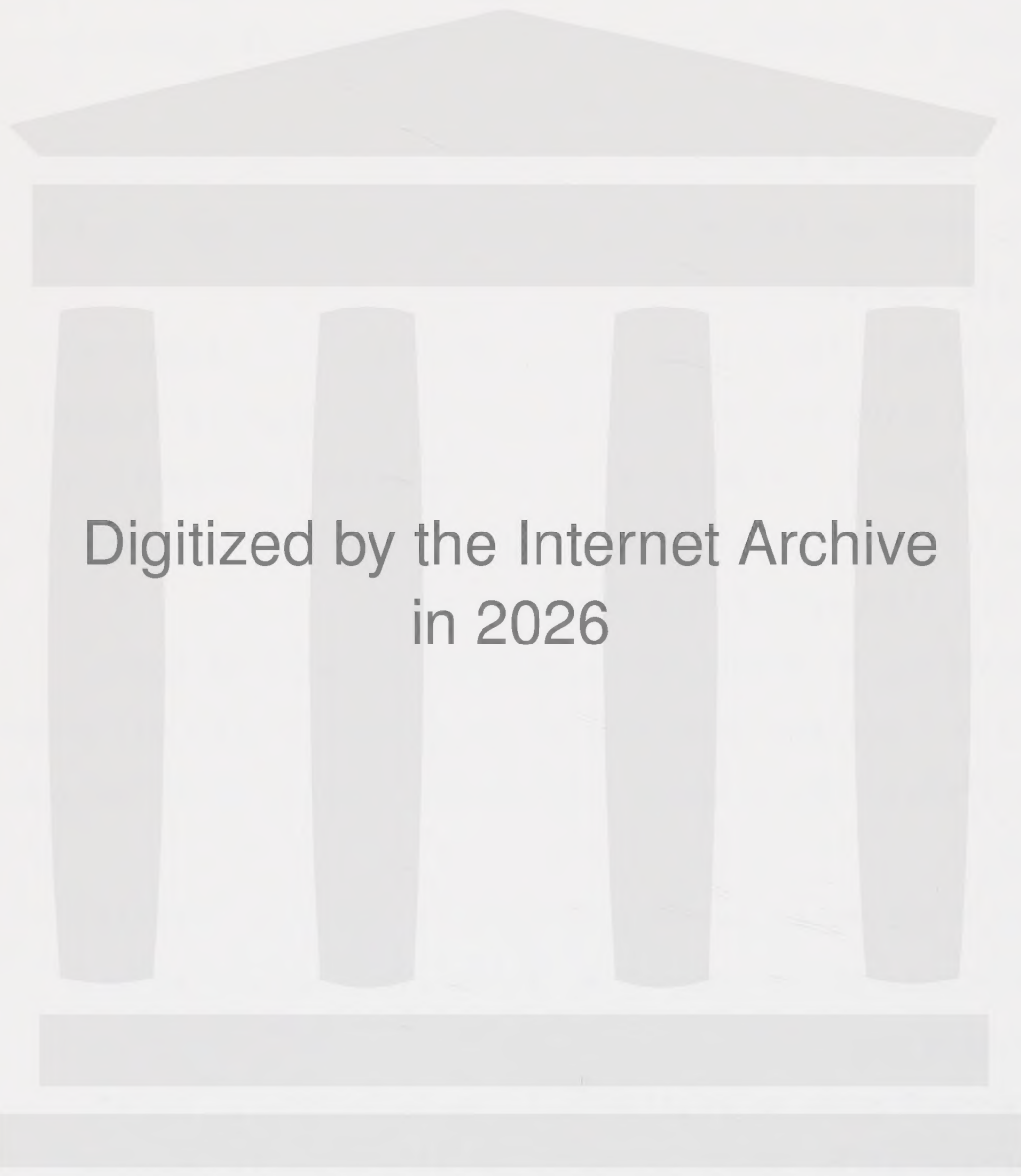
Messieurs les Professeurs S. BLIMAN et C. WATSON ont bien voulu faire partie du Jury: je les en remercie vivement.

Monsieur E. CANOBBIO a été à l'origine du travail en suggérant l'utilisation de coordonnées hyperboliques, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Monsieur M. BRAMBILLA me proposa ce sujet de thèse, m'initia à l'analyse numérique et me conseilla très utilement lors de l'étude des plasmas à électrons chauds. Qu'il en soit remercié.

Je tiens aussi particulièrement à remercier Monsieur R. NAKACH pour sa collaboration à l'évaluation des bilans thermonucléaires.

Enfin l'aide de Messieurs O. de BARBIERI, L. DUPAS, C. GORMEZANO et G. MELIN me fut précieuse pour la compréhension des phénomènes particuliers aux plasmas à électrons chauds; ainsi que l'aide de Monsieur J. BAREAU pour la partie numérique de ce travail. Qu'ils en soient remerciés.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549012_0007

RESUME.

Les collisions Coulombiennes sont la principale cause de la rapide fuite des particules chargées hors des configurations magnétiques à miroirs et peuvent être un empêchement à la réalisation de réacteurs à fusion économiques. Les collisions entre particules chargées sont décrites par des équations de FOKKER-PLANCK couplées entre elles qui ne peuvent être résolues numériquement que dans le cas de modèles théoriques simplifiés.

Nous avons d'abord passé en revue les différents modèles utilisés jusqu'à ce jour pour décrire les plasmas à ions chauds ($T_i \geq T_e$), ainsi que les résultats obtenus avec ces modèles.

Nous avons utilisé un de ces modèles pour simuler numériquement le comportement dans le temps des plasmas à électrons chauds ($T_e \gg T_i$).

Enfin nous avons mis au point un nouveau modèle théorique qui nous permet notamment de tenir compte des anisotropies des coefficients de freinage et de diffusion dans l'équation de FOKKER-PLANCK, alors que dans toutes les résolutions simultanées de plusieurs équations de FOKKER-PLANCK n'étaient considérées que les parties isotropes de ces coefficients. Ce modèle nous a permis de calculer plus précisément la densité et le temps de confinement des particules des plasmas à ions chauds. Nous avons aussi calculé l'effet des anisotropies des coefficients de diffusion et de freinage sur le facteur Q d'amplification de puissance d'un éventuel réacteur thermonucléaire.

UNIVERSITE de PROVENCE

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire Général : C. MOYNAULT

Professeurs

MM. J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
P. ROUARD	Physique générale
P. DESNUELLE	Chimie biologique
M. MERIGOUX	Physique industrielle
C. FEHRENBACH	Astronomie
A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
G. CARPENI	Chimie
Y. DOUCET	Physique
J.M. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
J. METZGER	Chimie
L. FOURES	Mathématiques
D. MALE	Physique
G. BODIOU	Mathématiques appliquées
M. NAUDET	Chimie des corps gras
P. BOUSQUET	Physique
P. PESTEIL	Physique
P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
G. GOUVERNET	Géologie appliquée
A. VISCONTI	Physique théorique
A. BLANCHARD	Mathématiques générales
M. DUSSARDIER	Physiologie animale
P. QUEZEL	Botanique
A. JULG	Chimie théorique
S. TAXY (Mme)	Géologie historique
F. TESSIER	Géologie générale
M.L.FURNESTIN(Mme)	Biologie animale
M. BERTRAND	Chimie
J. TROMPETTE	Physique
M. LAFFITTE	Chimie
R. FRAISSE	Mathématiques

C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
R. NEGRE	Biologie végétale
R. COULON	Physique
R. KERN	Minéralogie
L. SIDERIADES	Physique
JM. SURZUR	Chimie organique
H. CHANTREL	Physique de l'espace
J. SOUGY	Géologie
J. HERVE	Electronique
H. BODOT	Chimie
J. CHOUTEAU	Physiologie animale
R. PHILIP	Physique
L. CAPELLA	Minéralogie
P. BILLARD	Mathématiques
M. BONNEAU	Mathématiques
J.C. TRAYNARD	Chimie industrielle
C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
A. PONS	Botanique
A. GIRARDIE	Zoologie
J. MANDELBROJT	Physique
M. BIZOUARD	Physique
J.P. DAVID	Physique
J.C. MAIRE	Chimie
M. SIMON	Physiologie animale
G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
R. PETIT	Physique
M. HUGON	Psycho-physiologie

Professeurs sans chaire

R. AMAR	Zoologie
L. DEVEZE	Biologie marine
F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
H. GUENOCHÉ	Mathématiques appliquées
J. HENNEQUIN	Electronique
S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
C. FEUGEAS	Chimie
J. CABANE	Chimie

G. RASIGNI	Physique
S. COMBET	Chimie
R. GARRON	Physique expérimentale
M. CADILHAC	Physique
B. WAEGELL	Chimie
F. HALBWACHS	Physique
M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
R. GILLET	Physique
L. SARDA	Biochimie
C. ROMAN	Physiologie animale
A. GILLET	Mathématiques
S. MARTINUZZI	Physique

Maîtres de conférences

H. PATIN	Chimie
J. CRESP	Biologie animale
M. BENARROCHE	Physique
H. TACHOIRE	Chimie
E. VINCENT	Chimie
L. VICENTE	Biologie animale
J. MANUCEAU	Mathématiques
R. GUERMEUR	Physique
M. DELAAGE	Biochimie
F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
M. SIRUGUE (Mme)	Physique
H. MERDY	Physique
L. PUJOL	Chimie
A. LAVAGNE	Biologie végétale
J. GIUDICELLI	Biologie animale
M. FOUGEREAU	Biochimie
G. NOAT	Physiologie végétale
R. BOUDET	Mathématiques
R. STREIFF	Chimie
J.P. BELAICH	Microbiologie
P. NEVILLE	Biologie végétale
J.P. SOUBLIN	Mathématiques
S. DELACHE (Mme)	Mathématiques
A. CASALOT	Chimie

M. MOULINS
J. DETRAZ
R. PUJOL
B. MARTINET
G. FARDOUX
D. BENLIAN

Biologie générale
Mathématiques
Psycho-physiologie
Mathématiques
Mathématiques
Chimie

PLAN

CHAPITRE I : INTRODUCTION

Page : 3

CHAPITRE II : DIFFERENTS MODELES SIMPLIFIES PERMETTANT LA RESOLUTION DES EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK

II - 1. Hypothèses de base et équation de

FOKKER-PLANCK Page : 10

II - 2. Nécessité des modèles simplifiés

Page : 17

II - 3. Les modèles à un fluide

Page : 18

II - 4. Les modèles à plusieurs fluides

Page : 25

CHAPITRE III : EFFETS DES COLLISIONS COULOMBIENNES ET DES BOUCHONS H.F. SUR LES PLASMAS A ELECTRONS CHAUDS

III - 1. Confinement des ions par un potentiel

électrostatique Page : 35

III - 2. Choix d'un modèle théorique

Page : 37

III - 3. Effets des collisions Coulombiennes

en l'absence de H.F. Page : 41

III - 4. Effets des bouchons H.F. et du poten-

tiel ambipolaire Page : 49

CHAPITRE IV : RESOLUTION D'EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK AVEC DES COEFFICIENTS ANISOTROPES

IV - 1. Motivation et choix d'un système de

coordonnées Page : 55

IV - 2. Expressions des pseudo potentiels de ROSENBLUTH et réduction des équations.	Page : 60
IV - 3. Equations d'évolution des fonctions de distribution des ions et des électrons	Page : 64
IV - 4. Résolution des équations pour des plas- mas de Deutérium	Page : 69
IV - 5. Résolution des équations pour des plas- mas de Deutérium, Tritium et Hélium 4	Page : 75
CONCLUSIONS	Page : 78
TABLE 1 : EXPRESSIONS DE $\overline{n\tau}$	Page : 79
ANNEXE 1: TRANSFORMATION DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK EN COORDONNEES HYPERBOLIQUES	Page : 81
ANNEXE II:EXPRESSION ANALYTIQUE DU POTENTIEL AMBIPOLAIRE	Page : 85
ANNEXE III:TAUX MOYEN DE LA REACTION THERMONUCLEAIRE DEUTE- RIUM-TRITIUM	Page : 91
ANNEXE IV:METHODES NUMERIQUES	
A-IV- 1. Schémas numériques explicites et impli- cites	Page : 99
A-IV- 2. Quelques problèmes spécifiques aux équations de FOKKER-PLANCK	Page : 100
A-IV- 3. Calculs des fonctions de BEN-DANIEL	Page : 104
REFERENCES	Page : 105

CHAPITRE I
INTRODUCTION

La possibilité de réaliser un réacteur thermonucléaire à bilan énergétique positif à partir d'une configuration magnétique à miroirs a toujours été une question contestée; en fait, les particules chargées tendent à s'échapper rapidement du piège magnétique et il est possible que les collisions thermonucléaires ne puissent pas produire assez d'énergie pour simplement maintenir les conditions d'équilibre du réacteur. Les deux principales causes de la fuite des particules chargées sont :

1. Les collisions Coulombiennes qui en déviant les trajectoires des particules chargées les font s'échapper par les extrémités du piège. Les Anglo-Saxons qualifient ces pertes de classiques et les expriment en fonction du facteur d'amplification de puissance du réacteur $1/Q = P_F/P_I$ où P_F est la puissance obtenue par réactions thermonucléaires et P_I la puissance qu'il faut fournir au plasma par injection de particules chargées pour maintenir son régime d'équilibre. Pour un plasma composé de Deutérium et de Tritium.

$$P_F = n_D n_T \overline{(\sigma v)}_{D,T} E_F \quad (1 - 1)$$

$$P_I = J_D E_{D,s} + J_T E_{T,s} \quad (1 - 2)$$

où n_D et n_T sont les densités de Deutérium et de Tritium à l'intérieur du réacteur, $\overline{(\sigma v)}_{D,T}$ est le taux moyen de réactions thermonucléaires, E_F est l'énergie obtenue par réaction thermonucléaire, J_D et J_T sont les nombres de particules injectées dans le plasma durant une seconde avec les énergies $E_{D,s}$, $E_{T,s}$. L'énergie obtenue par une réaction thermonucléaire E_F est généralement prise égale à 22,4 MeV car si la fusion

du Deutérium et du Tritium se fait suivant la réaction



on suppose généralement que le Tritium peut être régénéré, hors du réacteur par la réaction



2. Les nombreuses instabilités qui tendent par différents mécanismes à s'opposer au confinement du plasma à l'intérieur du piège magnétique /1,2/.

Il y a une dizaine d'années, les évaluations des pertes classiques qui reposaient sur des solutions numériques d'équations de FOKKER-PLANCK (F.P.) /3/ ne tenant compte que des collisions ion-ion, conduisaient pour des rapports de miroir raisonnables à des valeurs de Q assez largement supérieures à l'unité pour que l'on puisse considérer que les collisions Coulombiennes n'étaient pas un empêchement majeur à l'obtention d'un bilan thermonucléaire favorable.

Au contraire, à la même époque il semblait que les instabilités seraient peut-être prohibitives /1/. En effet, dans toutes les expériences réalisées jusqu'alors, les temps de confinement des particules chargées étaient de plusieurs ordres de grandeur inférieurs aux valeurs théoriques obtenues à partir des résolutions d'équations de F.P. Toutefois, des progrès très spectaculaires ont été effectués avec notamment la réalisation d'expériences à minimum B /4/ et on a pu récemment /5/, /6/ obtenir des plasmas dont le comportement pendant des temps très courts pouvait être comparé avec des solutions de l'équation de F.P. Bien que de nombreux problèmes restent à résoudre notamment dans le domaine des micro-

instabilités /7/, ces résultats encourageants permettent d'envisager la possibilité dans un avenir relativement proche, d'obtenir des plasmas pour lesquels les pertes dues aux instabilités seraient de l'ordre, ou inférieures, aux pertes classiques.

Malheureusement, tandis que ces progrès vers la stabilisation étaient obtenus, des résolutions plus précises des équations de F.P. /8,9,10/ qui tenaient compte à la fois des collisions avec les électrons et du potentiel ambipolaire qui assure la neutralité de charge du plasma /11/, ont pour des rapports de miroir raisonnables réduit les valeurs de Q à des valeurs très proches de l'unité /10/. Il est apparu alors qu'il serait nécessaire de réduire ou de compenser les pertes classiques. A cette fin, de nombreux procédés ont été envisagés, telle l'éventuelle réduction des pertes ioniques par des bouchons H.F. gyrorésonnants près de la fréquence cyclotronique ionique /12/ ou par un potentiel ambipolaire de signe inversé pouvant être créé par des bouchons H.F. résonnants près de la fréquence cyclotronique électronique /13/; telle la possibilité de convertir directement en électricité l'énergie des particules chargées qui s'échappent

du piège magnétique /14/, telle aussi la récupération des particules par des miroirs auto-injecteurs /15/ ou par une série de miroirs magnétiques disposés soit en ligne droite /16,17/ soit en cercle /18/ et formant alors une configuration hybride...

Si un seul de ces procédés est efficace, il doit être théoriquement possible d'obtenir des bilans énergétiques

favorables même pour des valeurs de Q inférieures à l'unité. Toutefois, l'efficacité de tels procédés n'est pas établie la possibilité de réaliser un réacteur économique dépend quand même de façon critique des valeurs de Q . C'est pour cela que des efforts très importants ont été faits au cours des dernières années /19,20/ afin d'améliorer la précision des évaluations de Q . Toutefois, la complexité des équations de F.P. nécessitant des hypothèses simplificatrices, ces calculs ont été effectués à partir d'un modèle théorique pessimiste qui suppose notamment que les fonctions de distribution sont à variables séparées et que les pseudo potentiels de ROSENBLUTH /21/ qui représentent dans l'équation de F.P. le freinage et la diffusion des particules chargées peuvent être réduits à leurs seules parties isotropes.

Nous avons en entreprenant ce travail principalement cherché à calculer le facteur Q d'une façon plus précise et pour cela avons été amenés à mettre au point un modèle théorique moins restrictif.

Le chapitre II de ce mémoire est consacré à une revue bibliographique des différentes résolutions numériques des équations de F.P., pour des plasmas confinés dans des pièges magnétiques à miroirs.

Nous avons utilisé une de ces méthodes de résolution pour mettre au point un programme numérique simulant le comportement dans le temps des plasmas à électrons chauds /22/. Dans ce type d'expériences, dont l'avenir thermonucléaire semble compromis /23/, le potentiel ambipolaire confine les ions /13/. Jusqu'alors toutes les résolutions numériques

d'équations de F.P. avaient été effectuées pour des plasmas à ions chauds. Une expérience à électrons chauds (CIRCE 25 KW) /24/ étant en cours d'exploitation dans le Laboratoire d'Ionique Générale, il nous a semblé utile de faire une simulation des collisions Coulombiennes et des effets possibles de bouchons H.F. sur les plasmas à électrons chauds. Les résultats obtenus seront exposés au chapitre III.

Toutefois, la partie la plus importante de notre travail a consisté à mettre au point et à exploiter un nouveau modèle théorique que nous exposerons au chapitre IV et dont l'originalité consiste d'une part en un développement dans l'espace des vitesses des fonctions de distribution des ions en fonctions propres de l'opérateur de Legendre satisfaisant à une condition initiale spécifique au problème /25/ et d'autre part et surtout en un développement en harmoniques sphériques des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH. Nous obtenons ainsi avec des valeurs du taux de réaction moyen calculées suivant une nouvelle méthode /26/, des nouvelles estimations du facteur Q. Nous nous sommes limités dans ce travail à l'étude du cas qui semble être le plus intéressant /20, 27,28/ d'un réacteur utilisant comme combustibles du Deutérium et du Tritium.

CHAPITRE II

DIFFERENTS MODELES SIMPLIFIES PERMETTANT LA RESOLUTION DES
EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK

II - 1. HYPOTHESES DE BASE ET EQUATION DE FOKKER-PLANCK.

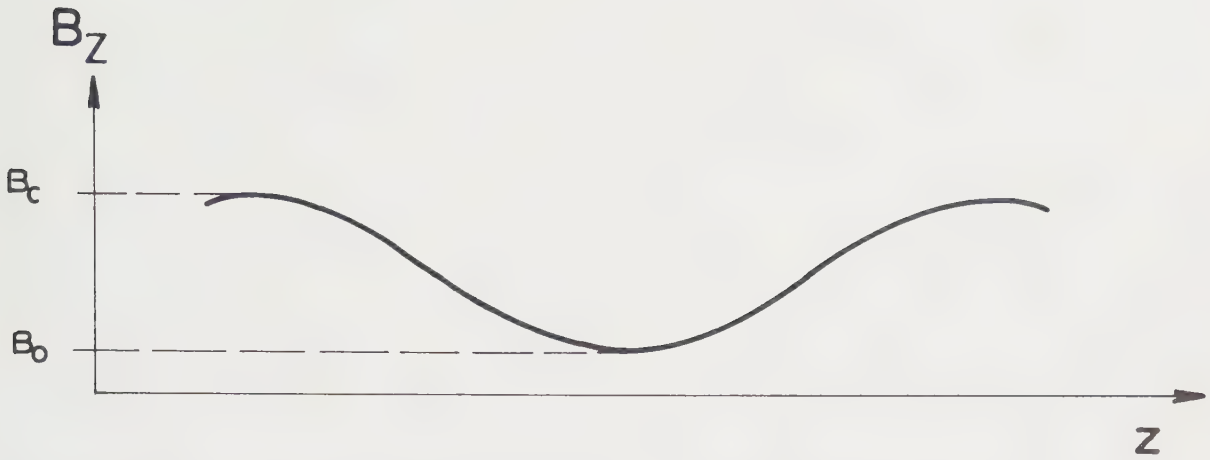
La fonction de distribution des particules d'espèce a $f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ obéit à l'équation d'évolution de Boltzman /29/.

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c + S_a \quad (2-1)$$

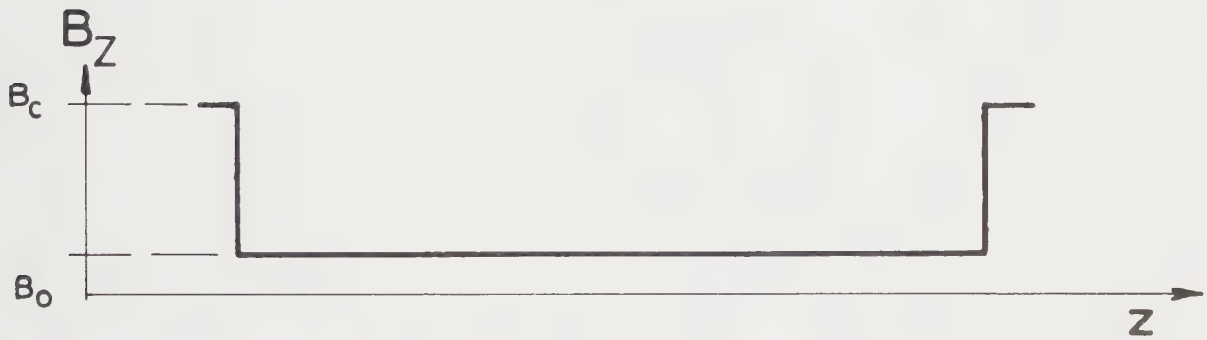
où $\vec{F}_a = Z_a e (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$ est la force extérieure agissant sur une particule d'espèce a, $\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c$ décrit les effets des collisions entre particules chargées et $S_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$ que nous appellerons terme de source représente les particules injectées dans le plasma à l'instant t.

Cette équation fait intervenir sept variables (avec le temps), mais dans le cas d'un plasma confiné dans un piège magnétique à miroirs, elle peut être considérablement simplifiée si on suppose que /30/ :

1. Le rayon du plasma est bien plus grand que le rayon de gyration des particules.
2. Une particule fait en moyenne plusieurs allers et retours le long de l'axe Oz (axe de symétrie de champ magnétique) avant que sa trajectoire ne soit sensiblement modifiée par les collisions.
3. La distance, le long de l'axe Oz sur laquelle le champ magnétique est uniforme est grande devant la longueur des miroirs où le champ magnétique varie. Le profil du champ magnétique peut alors être approximé par un profil en puits carré ou "square well", car en schématisant à l'extrême (voir Fig. 1) on peut considérer que la composante B_z du champ magnétique suivant Oz est constante avec la valeur B_0 sur une longueur L et croît brutalement jusqu'à la valeur B_c en $z = \pm \frac{L}{2}$



Profil réel de champ magnétique.



Profil en "square well "

Figure : 1

, le rapport $R = B_c/B_0$ est appelé rapport de miroir.

4. Aucun champ électrique ne pénètre dans la région où le champ magnétique est uniforme, la force dans cette région se réduit alors à $\vec{F}_a = Z_a e (\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Les deux premières hypothèses nécessitent un fort champ magnétique, une densité faible et des températures élevées. Toutes ces conditions sont en général satisfaites dans les expériences réalisées en vue de la fusion contrôlée. Afin de justifier la troisième hypothèse, plusieurs résolutions numériques des équations de F.P. ont été effectuées en tenant compte de la variation du champ magnétique le long de l'axe Oz /31, 32, 33/ et il a été établi /31,20/ que pour l'essentiel, c'est-à-dire le facteur Q, l'hypothèse "square well" conduit à une erreur par excès inférieure à 10%. Pour la quatrième hypothèse, nous pouvons remarquer que le champ électrostatique dérivé du potentiel ambipolaire /11/ reste constant tant que B_z ne varie pas et que, d'autre part, il est raisonnable de supposer que les champs électromagnétiques parfois utilisés pour chauffer ou réfléchir les particules ne pénètrent guère profondément en dehors des zones des miroirs /34/.

Toutes ces hypothèses permettent d'éliminer la dépendance spatiale dans l'équation (1) : $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} a = 0$ et de nous ramener à l'étude de la fonction de distribution des vitesses au centre du piège magnétique en $z = 0$.

D'autre part, les anisotropies azimuthales des fonctions de distribution des vitesses relaxant très vite /35/, il est raisonnable de supposer que les fonctions de distribution des vitesses possèdent une symétrie azimuthale, ce qui entraîne /30/

$$Z_a e (\vec{v} \wedge \vec{B}) \frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}} = 0$$

et nous permet de réécrire l'équation (2-1) sous la forme simplifiée

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c + S_a \quad (2-2)$$

avec $f_a(\vec{v}, t)$ et $S_a(\vec{v}, t)$.

Nous supposons enfin qu'à cause des symétries du champ magnétique $f_a(\vec{v}, t) = f_a(-\vec{v}, t)$

Dans les plasmas d'intérêt thermonucléaire les déviations dues aux collisions entre particules proches sont négligeables devant les déviations dues aux multiples collisions entre particules lointaines /36/. La description la plus appropriée du terme de collision $\left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c$ est donnée par l'équation de F.P. /21/.

$$\frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_a \frac{\partial h_a}{\partial v_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} \left(f_a \frac{\partial^2 g_a}{\partial v_i \partial v_j} \right) \quad (2-3)$$

avec $\Gamma_a = 4 \pi (z_a e)^4 / m_a^2$. Les coefficients $h_a(\vec{v}, t)$ et $g_a(\vec{v}, t)$ sont les pseudo potentiels de ROSENBLUTH /21/, représentent respectivement le freinage et la diffusion des particules et dépendent de toutes les fonctions de distribution des particules chargées qui composent le plasma

$$g_a(\vec{v}, t) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a} \right)^2 \log_e (\Lambda_{ab}) G_b(\vec{v}, t) \quad (2-4)$$

$$h_a(\vec{v}, t) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a} \right)^2 \log_e (\Lambda_{ab}) \frac{m_a + m_b}{m_b} H_b(\vec{v}, t)$$

avec

$$G_b(\vec{v}, t) = \int f_b(\vec{v}', t) |\vec{v} - \vec{v}'| d\vec{v}' \quad (2-5)$$

$$H_b(\vec{v}, t) = \int f_b(\vec{v}', t) |\vec{v} - \vec{v}'|^{-1} d\vec{v}'$$

et

$$\nabla_v^4 G_b = 8 \pi f_b \quad (2-5 \text{ bis})$$

$$\nabla_v^2 H_b = 4 \pi f_b$$

Dans les équations (2-4) $\log(\Lambda_{ab})$ est le logarithme de Coulomb qui résulte de la coupure arbitraire mais nécessaire et justifiée /36/ introduite dans le calcul conduisant à l'équation (2-3) /21/. Λ_{ab} est le rapport entre la longueur de Debye /29/: $\lambda_D = \left(\frac{k T_e}{4\pi m_e e^2}\right)^{1/2}$ et le paramètre d'impact critique P_0 dont l'ex-

pression en mécanique classique est :

$$P_0 = \frac{e^2}{|\vec{v} - \vec{v}'|^2} \frac{m_a + m_b}{m_a m_b}$$

Les valeurs de $\log_e(\Lambda_{ab})$ dépendant assez peu de $|\vec{v} - \vec{v}'|$, la plupart des auteurs ont pris $P_0 = \frac{e^2}{kT_e} \frac{2}{3}$ quels que soient a et b. Alors

$$\log_e(\Lambda_{ab}) = \log_e(D) = \log_e\left(\frac{3}{2} \frac{kT_e}{e^2} \lambda_D\right) \quad (2-6)$$

A cause de la symétrie azimuthale des fonctions de distribution des vitesses le nombre de variables intervenant dans l'équation (2-3) peut être réduit si nous choisissons le système de coordonnées indépendantes $v = |\vec{v}|$, $\mu = \cos(\vec{v}, \vec{Oz})$ et ϕ angle de rotation de $\vec{v}$ autour de $\vec{Oz}$. Alors l'équation (2-3) se réécrit /21/ (et Annexe 1).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma_a} \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} \right)_c &= - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[v^2 \frac{\partial h_a}{\partial v} f_a \right] - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial h_a}{\partial \mu} f_a \right] \\
&+ \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[v^2 \frac{\partial^2 g_a}{\partial v^2} f_a \right] + \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[\left(\frac{1-\mu^2}{v^2} \right) \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} f_a + \left(\frac{1-\mu^2}{v} \right) \frac{\partial g_a}{\partial v} f_a \right. \\
&- \left. \frac{\mu(1-\mu^2)}{v^2} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} f_a \right] + \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial v} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu \partial v} f_a - (1-\mu^2) \frac{1}{v} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} f_a \right] \\
&+ \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[- \left(\frac{1-\mu^2}{v} \right) \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} f_a - 2 \frac{\partial g_a}{\partial v} f_a + 2 \frac{\mu}{v} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} f_a \right] \\
&+ \frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\mu(1-\mu^2)}{v^2} \frac{\partial^2 g_a}{\partial \mu^2} f_a + 2 \frac{\mu}{v} \frac{\partial g_a}{\partial v} f_a + \frac{2(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial^2 g_a}{\partial v \partial \mu} f_a - \frac{2}{v^2} \frac{\partial g_a}{\partial \mu} f_a \right]
\end{aligned} \tag{2-7}$$

Dans les variables (v, μ) les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH (2-4, 2-5) s'expriment par des intégrales doubles sur des fonctions elliptiques. Mais si on développe les fonctions de distribution en polynômes de Legendre

$$f_a(v, \mu, t) = \sum_{j=0}^{\infty} V_{a,j}(v, t) P_j(\mu) \tag{2-8}$$

les pseudo-potentiels vérifient alors les relations /21/

$$H_a(v, \mu, t) = \sum_{j=0}^{\infty} H'_{a,j}(v, t) P_j(\mu) \tag{2-9}$$

$$G_a(v, \mu, t) = \sum_{j=0}^{\infty} G'_{a,j}(v, t) P_j(\mu)$$

avec

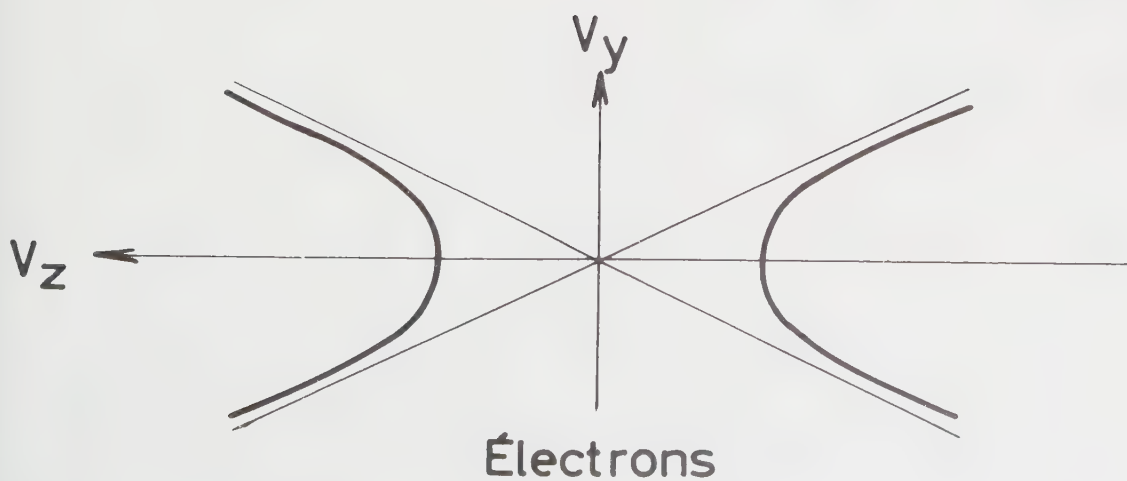
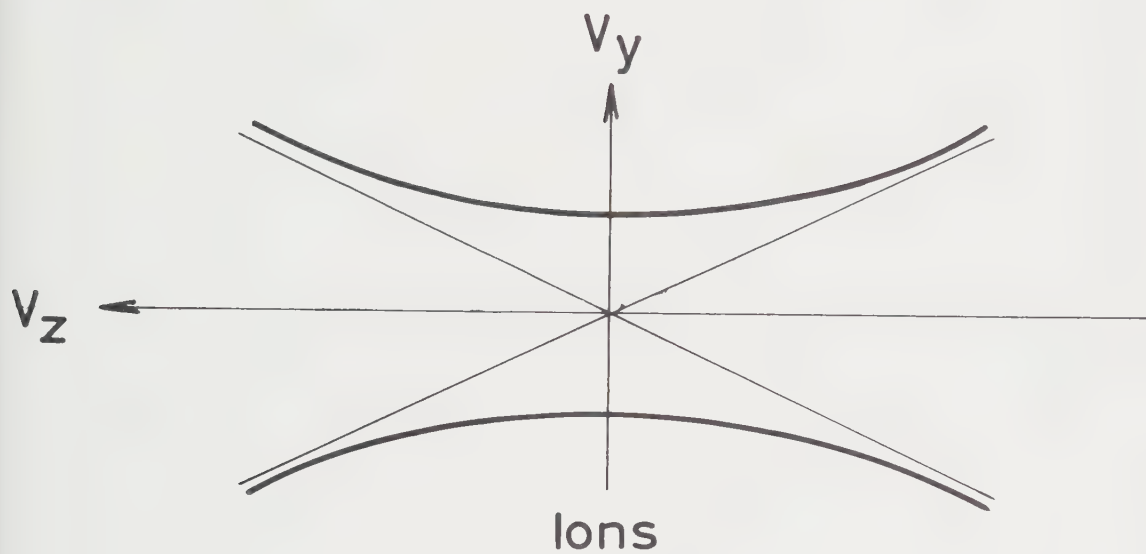
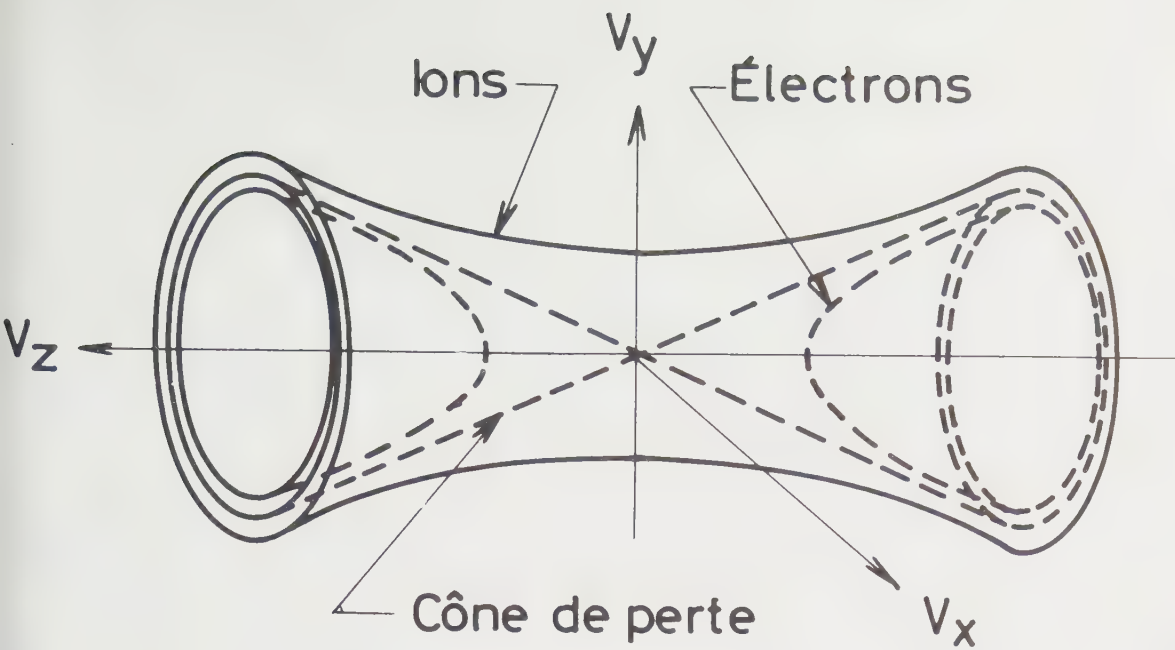
$$\begin{aligned}
H'_{a,j}(v, t) &= \frac{4\pi}{2j+1} \left\{ \int_0^v dv' \frac{(v')^{j+2}}{v^{j+1}} V_{a,j}(v', t) + \int_v^{\infty} dv' \frac{v^j}{(v')^{j-1}} V_{a,j}(v', t) \right\} \\
G'_{a,j}(v, t) &= \frac{4\pi}{4j^2-1} \left\{ \int_0^v dv' (v') \frac{(v')^{j+2}}{v^{j-1}} \left\{ 1 - \frac{j-1/2}{j+3/2} \frac{(v')^2}{v^2} \right\} V_{a,j}(v', t) \right. \\
&+ \left. \int_v^{\infty} dv' \frac{v^j}{(v')^{j-3}} \left\{ 1 - \frac{j-1/2}{j+3/2} \frac{v^2}{(v')^2} \right\} V_{a,j}(v', t) \right\}
\end{aligned} \tag{2-10}$$

Ces formules nous montrent que même pour des fonctions très anisotropes et donc représentées par un très grand nombre de polynomes de Legendre, les pseudo-potentiels seront très bien représentés par un petit nombre de polynomes de Legendre. D'autre part $H'_{a,j}$ et $G'_{a,j}$ ne dépendant que de $V_{a,j}$, il suffit pour bien représenter H_a et G_a de ne connaître que les premiers de $V_{a,j}$. Notons enfin qu'à cause des symétries des fonctions de distribution $f_a(v, \mu, t) = f_a(v, -\mu, t)$, tous les termes d'ordre impair dans les développements (2-8) et (2-9) sont nuls.

II - 2. NECESSITE DES MODELES SIMPLIFIES.

Le comportement, sous l'effet des collisions Coulombiennes, d'un plasma sera décrit par autant d'équations de F.P. qu'il y a d'espèces de particules, c'est-à-dire au moins deux. Des équations en deux dimensions comme (2-8) ne peuvent être résolues que numériquement suivant un schéma ayant au moins une partie "explicite" /33/ (et Annexe 4). Un schéma numérique explicite doit satisfaire à un critère de stabilité. Pour cela il est nécessaire quand on discrétise le temps de choisir des intervalles suffisamment courts. Malheureusement les ions et les électrons ayant des temps de relaxation en général très différents /36/, le critère de stabilité pour les électrons impose des intervalles de temps qui sont une infime fraction du temps de relaxation des ions.

Bien qu'il soit très difficile d'exprimer précisément le critère de stabilité numérique pour des équations à coefficient non constants, il est généralement admis /33/ que dans le cas des plasmas à ions chauds, la résolution simultanée et en deux dimensions d'équations de F.P. pour les ions et les électrons nécessiterait un nombre d'itérations prohibitif.



HYPERBOLOÏDES DE PERTE

Figure : 2

donné, ainsi que toutes les autres valeurs de $\overline{n\tau}$, en table I.

Cependant la résolution de l'équation (2-7) peut être considérablement simplifiée si on suppose encore que :

1. Les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH peuvent être réduits à leurs seules parties isotropes (voir équations 2-4, 2-9 et 2-10) notées h_{is} et g_{is} .

2. Les fonctions de distribution sont à variables séparées:

$$f_i(v, \mu, t) = V_{i,0}(v, t) X(\mu) \quad (2-11)$$

$$\text{avec } \int_0^{\mu_c} X(\mu) d\mu = 1 \quad \text{et } X(\mu_c) = 0$$

Avec ces hypothèses l'équation (2-7) devient : (2-12)

$$\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_{i,0}(v, t) X(\mu) \right] = X(\mu) \left\{ -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[V_{i,0}(v, t) \left(v^2 \frac{\partial h_{is}}{\partial v} + \frac{\partial g_{is}}{\partial v} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[V_{i,0}(v, t) v^2 \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial v^2} \right] \right\} + \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} V_{i,0}(v, t) L_\mu \left[X(\mu) \right]$$

où L_μ est l'opérateur de Legendre défini par :

$$L_\mu \left[X(\mu) \right] = \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} X(\mu) \right\} \quad (2-13)$$

en supposant que $X(\mu)$ est une combinaison de polynômes de Legendre de première et deuxième espèce et en comparant avec les résultats de ROBERTS et CARR /3/, BING et ROBERTS /30,38/ ont trouvé raisonnable de poser

$$L_\mu \left[X(\mu) \right] = -(\log_{10} R)^{-1} X(\mu) \quad (2-14)$$

Alors en divisant par $X(\mu)$, l'équation (2-12), celle-ci devient

$$\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_{i,0}(v, t) \right] = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[V_{i,0}(v, t) \left(v^2 \frac{\partial h_{is}}{\partial v} + \frac{\partial g_{is}}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{2v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left[V_{i,0}(v, t) v^2 \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial v^2} \right] - (\log_{10} R)^{-1} \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} V_{i,0}(v, t) \quad (2-15)$$

Suivant cette équation les pertes s'expriment simplement

$$\frac{1}{\Gamma_i} \frac{dn}{dt} = - 2\pi (\log_{10} R)^{-1} \int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} V_{i,0}(v,t) dv \quad (2-16)$$

L'équation (2-15) ne dépendant plus que de v et de t peut être résolue par un schéma numérique implicite (voir Annexe IV) et donc inconditionnellement stable /37/. Avec ou sans un terme de source de la forme $S(v, \mu) = S'(v) X(\mu)$, BING et ROBERTS /30, 38/ ont résolu l'équation (2-15). Les valeurs de π_T qu'ils obtiennent sont en l'absence de source très sensiblement égales à la moitié de celles de ROBERTS et CARR.

Les valeurs de BING, obtenues avec une source, multipliées par un facteur 2 ont servi à POST /1/ pour son évaluation de Q . Pour un rapport de miroir de 3,3, POST trouvait Q maximum avec une valeur de 5,6 correspondant à une énergie d'injection des ions de 120-140 keV.

Le modèle de BING et ROBERTS a été amélioré par BEN-DANIEL et ALLIS /25/ qui ont exprimé $X(\mu)$ en fonctions propres de l'opérateur de Legendre $M_j(\mu)$ satisfaisant aux conditions.

$$L_\mu [M_j(\mu)] + m_j(m_j + 1) M_j(\mu) = 0 \quad (2-17)$$

$$M_j(\mu = \mu_c) = 0$$

$$M_j(\mu = 0) = 1$$

$$M_j(-\mu) = M_j(\mu)$$

j qui est entier est le nombre de zéros de la fonctions $M_j(\mu)$

sur l'intervalle $[0, \mu_c]$ (voir Figure 3 et Annexe IV).

BEN-DANIEL et ALLIS se sont limités, dans leurs calculs à $X(\mu) = CM_1(\mu)$ et ont trouvé un très bon accord inférieur ou égal à 6 % entre $m_1(m_1 + 1)$ et $\log_{10} R$ /39/. Après avoir utilisé les relations (2-5 bis) et ensuite réduit les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH à leurs parties isotropes, BEN-DANIEL et ALLIS ont réécrit l'équation (2-7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_{i,o}(v,t) \right] M_1(\mu) &= 4\pi (\log_e D) C \left[V_{i,o}(v,t) M_1(\mu) \right]^2 \quad (2-18) \\ + M_1(\mu) &\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial v^2} \frac{\partial^2 V_{i,o}}{\partial v^2}(v,t) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} \frac{\partial V_{i,o}}{\partial v}(v,t) \right] \\ - \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} &m_1(m_1 + 1) V_{i,o}(v,t) M_1(\mu) \end{aligned}$$

FONCTIONS DE BEN-DANIEL

pour $\mu_c = 0,815$

$R = 3$

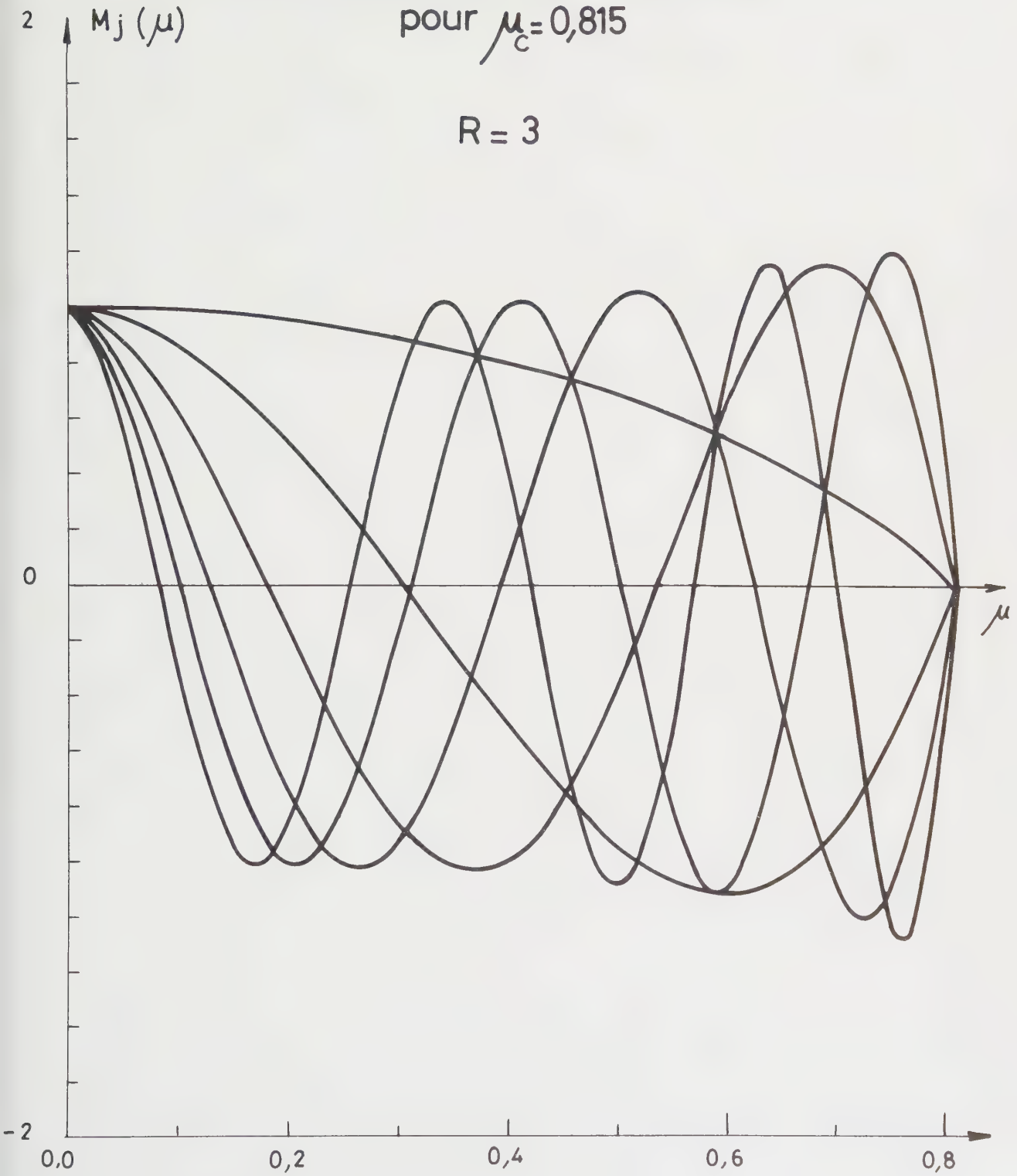


Figure: 3

En multipliant l'équation (2-18) par $M_1(\mu)$ et en intégrant de 0 à μ_c , avec les définitions (voir Chapitre IV)

$$I_{j,0} = \int_0^{\mu_c} M_j(\mu) d\mu \quad (2-19)$$

$$N_{j,j,0} = \int_0^{\mu_c} \left[M_j(\mu) \right]^2 d\mu$$

$$\gamma_{1,1,1} = \int_0^{\mu_c} \left[M_1(\mu) \right]^3 d\mu / (I_{1,0} N_{1,1,0})$$

$$\text{et } C = 1/I_{1,0}$$

l'équation (2-18) devient en divisant par $N_{1,1,0}$ (2-20)

$$\frac{1}{\Gamma_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[V_{i,0}(v,t) \right] = 4\pi(\log_e D) \gamma_{111} \left[V_{i,0}(v,t) \right]^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} V_{i,0}(v,t) \\ + \frac{1}{v^2} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} V_{i,0}(v,t) - m_1(m_1 + 1) \frac{1}{2v^3} \frac{\partial g_{is}}{\partial v} V_{i,0}(v,t)$$

Cette équation diffère de (2-15) principalement par le fait que γ_{111} est différent de 1, ce qui dans le cas d'un rapport de miroir de 3 augmente $\overline{n\tau}$ d'environ 20%. Toutefois, les valeurs de $\overline{n\tau}$ obtenues par BEN-DANIEL et ALLIS sont supérieures de plus de 20% de celles de BING et ROBERTS, il est vraisemblable /25/ (leurs papiers ne sont guère explicites sur ce point) que BING et ROBERTS ont involontairement multiplié les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH par $1/I_{1,0}$.

N.B.

Dans une étude antérieure, où nous avons d'ailleurs trouvé la première évaluation du facteur Q, JUDD, MAC-DONALD et ROSENBLUTH /40/ avaient intégré analytiquement l'équation (2-16) en prenant pour cela $V_{i,0}(v,t)$ Maxwellien. Pour calculer le pseudo-potentiel, ils avaient pris $V_{i,0}(v,t)/I_{1,0}$ au lieu de $V_{i,0}(v,t)$.

II - 4. LES MODELES A PLUSIEURS FLUIDES

Si les hypothèses sur lesquelles reposaient les modèles à un fluide paraissaient justifiées, un calcul effectué par FOWLER et RANKIN /8/ pour évaluer le potentiel ambipolaire et l'allure des fonctions de distribution dans l'expérience DCX-2, a permis de montrer qu'il n'en était rien. En utilisant les hypothèses de séparabilité des variables dans les fonctions de distribution et d'isotropisation des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH, ces auteurs résolvent deux équations de F.P., similaires à (2-15), une pour les ions et une pour les électrons, couplées entre elles par les pseudo-potentiels (2-4), avec termes de source mais uniquement pour l'état stationnaire : $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

Pour tenir compte de l'effet du potentiel ambipolaire Φ_0 sur le confinement des particules, FOWLER et RANKIN considérant qu'en présence d'un potentiel électrostatique Φ_0 positif au centre de la configuration magnétique et nul à l'extérieur, les surfaces de pertes deviennent des hyperboloïdes de révolution à une nappe pour les ions et à deux nappes pour les électrons (voir Figure 2); remplacent dans les équations (2-15) et (2-16) $1/\log_{10} R$ par : /8/, (+)

$$P_{i,e}(v) = 1 - \left[1 - \frac{1}{R} \left(\frac{1 + 2 Z_{i,e} \Phi_0}{m_{i,e} v^2} \right) \right]^{1/2} \quad (2-21)$$

ou, dans leurs derniers calculs /9,10/ par $1/\log_{10} R_{\text{eff}}^{(v)}(i,e)$

(+) Ils écrivent leurs équations en utilisant la variable d'énergie, mais afin d'uniformiser les notations, nous continuerons dans ce travail à utiliser la variable v

avec

$$R_{\text{eff}}^{(v)}(i,e) = R \left(1 + \frac{2 Z_{i,e} \Phi_0}{m_{i,e} v^2} \right)^{-1} \quad (2-22)$$

Pour les ions $V_{i,0}(v) = 0$ si
 $v < \left(2 Z_i e \Phi_0 / m_i (R-1) \right)^{1/2}$

et pour les électrons $P_e(v)$ ou $R_{\text{eff}}^{(v)}(e) = 0$ si
 $v < \left(2 e \Phi_0 / m_e \right)^{1/2}$

Plutôt que de recalculer à chaque itération le potentiel ambipolaire, FOWLER et RANKIN ont préféré le considérer comme fixé et pour assurer la neutralité de charge du plasma, ajuster à chaque itération le courant d'injection des ions.

Les valeurs de π_T obtenues par FOWLER et RANKIN /10/ (voir table I), sont environ 8 fois plus petites que celles de POST /1/. Leurs valeurs de Q ayant été obtenues avec un taux de réaction moyenné sur une seule fonction de distribution, sont 3 à 4 fois plus faibles que celles de POST /1/. Ainsi pour un rapport de miroir de 3, Q présente un maximum d'environ 1,4 correspondant à une énergie d'injection de 260 keV.

FOWLER et RANKIN /10/ expliquent les différences entre leurs résultats et ceux obtenus à partir des modèles à un fluide par le fait que, si dans l'expression des pertes ioniques la contribution des électrons semble négligeable, dans la réalité les ions sont d'abord refroidis par les électrons. Les sections efficaces de collisions Coulombiennes étant des fonctions décroissantes de la vitesse /29/, la probabilité de perte des ions croît

considérablement quand ceux-ci se refroidissent. Par ailleurs, en présence d'un potentiel ambipolaire, dans l'espace des vitesses la région de confinement des ions se rétrécit puis s'annule vers les faibles énergies (Voir Figure 2). FOWLER et RANKIN ont estimé que leurs faibles valeurs de $\overline{n_T}$ étaient dues de façon égale au refroidissement des ions et à la présence d'un potentiel ambipolaire.

Afin d'estimer le réchauffement des deutérons du plasma par les particules α obtenues par réactions thermonucléaires /41/ (1-3), FOWLER et RANKIN ont modifié leur programme numérique pour résoudre une équation de F.P. pour les Deutérons et une pour les particules α . Ils ont tenu compte des contributions électroniques dans les expressions des pseudo-potentiels (2-4) en supposant que la fonction de distribution des électrons était une Maxwellienne dont ils ont fixé la densité et l'énergie. Ils ont trouvé que l'accroissement de $\overline{n_T}$ et de Q dû au réchauffement des deutérons par les particules α était inférieur à 10%.

Le programme numérique de FOWLER-RANKIN a été repris et amélioré par KUO-PETRAVIC, PETRAVIC et WATSON /19/ qui ont résolu trois équations de F.P. couplées (pour les électrons, les deutérons et les α). Ils ont aussi modifié l'expression de $\log_e D$ (2-6) en prenant $\frac{m_e}{m_D} T_D$ au lieu de T_e :

$$\log_e D = \log_e \left(\frac{3}{2} \left\{ \frac{m_e k T_D}{m_D} e^{2\lambda} \right\} D \right) \quad (2-23)$$

En effet pour les collisions ion-électron l'effet le plus important, c'est-à-dire le refroidissement est dû aux collisions des ions sur les électrons dont la vitesse est inférieure à

celle des ions et (2-23) est dans ce cas pleinement justifié. La correction (2-23) introduite dans l'expression de $\log_e D$ fait décroître celui-ci d'environ 20 jusqu'à environ 12.

KUO-PETRAVIC et al ont aussi et c'est là certainement le point le plus important de leur travail, pris pour calculer Q , des valeurs du taux de réaction moyennées sur deux fonctions de distribution, en utilisant pour représenter celles-ci des combinaisons de Maxwellliennes.

En l'absence de particules α , KUO-PETRAVIC et al trouvent que pour un rapport de miroir de 3 Q est maximum avec la valeur 0,7 correspondant à une énergie d'injection de 120 keV. En présence de particules α , ils trouvent en appelant Q_0 les valeurs obtenues sans α

$$Q_\alpha = Q_0 / (1 - Q_0/6,4) \quad (2-24)$$

Toutefois, ces auteurs ainsi qu'apparemment ceux des références /10/ et /20/, continuent afin d'uniformiser les résultats à prendre $E_F = 22,4$ MeV. Ils négligent ainsi le fait que si les particules α sont créées avec une énergie de 3,52 MeV (2-3), elles s'échappent du piège magnétique avec une énergie de quelques centaines de keV /10, 19/.

Afin de voir quel est l'effet exact du potentiel ambipolaire sur l'augmentation des pertes ioniques, KUO-PETRAVIC et al ont fait des tests en annulant l'effet du potentiel ambipolaire sur les ions (2-22). Dans ce cas $\overline{n\tau}$ augmente seulement de 25%, ce qui montre clairement que dans les calculs de FOWLER et RANKIN

/8, 9, 10/ l'abaissement de $\overline{n\tau}$ était essentiellement dû au refroidissement des ions par les électrons.

Enfin l'évaluation la plus précise et la plus récente du facteur Q est due à FUTCH, HOLDREN, KILLEEN et MIRIN /20/ qui ont modifié un programme numérique mis au point par KILLEEN et FUTCH /42/. Le programme initial résolvait avec des hypothèses semblables à celles de FOWLER-RANKIN /8/, deux équations de F.P. dépendantes du temps en calculant à chaque instant le potentiel ambipolaire. FUTCH et al /20/ ont résolu plusieurs équations de F.P. couplées entre elles en tenant compte de la création de particules par réactions thermonucléaires. Pour cela ils modifient à chaque itération les courants d'injection des ions en utilisant pour le calcul des taux de réaction moyens des fonctions de distribution dont la partie en v est donnée par les solutions des équations de F.P. mais avec une partie angulaire isotrope. Avec cette façon de procéder, leur programme bien que dépendant du temps ne peut décrire correctement que l'état d'équilibre.

FUTCH et al ont modifié l'expression du logarithme de Coulomb $\log_e (\Lambda_{ab})$ (2-6) en remarquant que pour les énergies envisagées, il est raisonnable d'introduire des corrections d'ordre quantique dans l'expression du paramètre d'impact critique P_0 /43 et 36/. Alors

$$\log_e (\Lambda_{a,b}) = \log_e \left\{ \left(\frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \right) \frac{2\alpha}{e^2} \lambda_D C \left[\max(\bar{v}_a^2, \bar{v}_b^2) \right]^{1/2} \right\} - \frac{1}{2} \quad (2-25)$$

où $\alpha = 1/237$ est la constante de structure fine.

Ces auteurs ont comparé l'efficacité de réacteurs fonctionnant au D-T et au D-H_e³. La dernière réaction pouvant être préférable si la conversion directe en électricité se révèle avoir une très grande efficacité /14/. Pour un réacteur utilisant du Deutérium et du Tritium comme combustibles, ils ont résolu quatre équations (D, T, α et e). Pour un rapport de miroir de 3 ils ont trouvé Q maximum aux alentours de 0,6 pour une énergie d'injection comprise entre 200 et 300 keV.

Signalons enfin qu'à partir du programme numérique de FOWLER-RANKIN des travaux ont été effectués pour, d'une part, apprécier l'effet de la dépendance temporelle /44/ et, d'autre part, évaluer l'effet du réchauffement éventuel des électrons par un chauffage H.F. /45/. Cet effet a été trouvé négligeable si on tient compte dans les bilans thermonucléaires des puissances H.F. nécessaires.

Parallèlement à tous ces travaux qui résolvaient plusieurs équations de F.P. ne dépendant explicitement que de la variable v (et parfois du temps), un travail a été effectué par MARX /32/ et KILLEEN /33/, dans lequel l'équation de F.P. des ions est résolue en deux dimensions (v et $\theta = \arccos \mu$); et où la fonction de distribution des ions est supposée être une Maxwellienne tronquée. C'est-à-dire une Maxwellienne avec pour les vitesses suffisamment grandes une probabilité de perte donnée par $P_e(v)$ (2-21). Au vu des résultats de FOWLER et RANKIN /8/ ou de ceux de KILLEEN et FUTCH /42/, cette hypothèse semblait

justifiée et permettait d'obtenir pour $\frac{dn_e}{dt}$ et $\frac{dV_e}{dt}$ deux équations différentielles ordinaires et donc aisément solvables par une méthode RUNGE-KNUTTA. Leur programme résoud l'équation pour les ions en employant un schéma numérique en partie implicite, et qui de ce fait se heurte à un critère de stabilité moins sévère que celui rencontré par ROBERTS et CARR /3/. Ce programme, évidemment dépendant du temps calcule aussi à chaque instant le potentiel ambipolaire.

Malheureusement, lorsqu'on veut simuler numériquement des phénomènes qui ont des échelles de temps et de vitesses très différentes, comme c'est le cas pour la relaxation des fonctions de distribution des ions et des électrons sous l'effet des collisions, les risques et les causes d'erreurs numériques sont considérables. Il est donc nécessaire de s'assurer que certaines lois de conservations sont bien remplies quand on applique les méthodes numériques (voir Annexe IV). Le programme de FOWLER-RANKIN comportait des tests pour la conservation de l'énergie et celui de KILLEEN-FUTCH des tests pour la conservation de la matière et de l'énergie. De tels tests sont bien plus difficiles à mettre au point pour un programme en deux dimensions. Aussi afin d'avoir une vérification des hypothèses et des méthodes numériques employées, MARX /32/ a fait des tests en résolvant l'équation de F.P. des électrons en deux dimensions et en supposant que la fonction de distribution des ions est une Maxwellienne tronquée. Les résultats obtenus par ce procédé étant très différents de ceux obtenus par le procédé normal,

il est nécessaire pour les ajuster de multiplier l'expression de $\frac{dn_e}{dt}$ par 10 et celle de $\frac{d\overline{v^2}}{dt}_e$ par 0,5. Dans une version plus récente de ce programme numérique /20/, $P_e(v)$ est remplacé par $1/\log_{10} R_{eff(e)}(v)$ (2-22) et les pertes électroniques sont ajustées afin de concorder avec les pertes électroniques obtenues par FUTCH et al /20/. Dans cette dernière version, $\frac{d\overline{v^2}}{dt}_e$ n'est plus corrigé mais $\frac{dn_e}{dt}$ l'est encore par un facteur 0,25. Les valeurs de $\overline{n_T}$ obtenues alors sont supérieures à celles de la première version et sensiblement égales à celles obtenues par FUTCH et al /20/. Ce qui d'ailleurs semble être en contradiction avec les résultats comparés de ROBERTS et CARR /3/ et BING et ROBERTS /30/ dans le cas des seules collisions ion-ion.

Le programme numérique de MARX-KILLEEN /32, 33/ dépend du temps, tient compte de façon explicite des dépendances angulaires de la fonction de distribution et du terme de source des ions et aussi éventuellement de la dépendance spatiale le long de l'axe Oz. Ce programme, à cause du grand nombre d'informations qu'il peut fournir, est particulièrement adapté pour simuler le comportement dans le temps des plasmas à ions chauds contenus dans les dispositifs expérimentaux de la génération actuelle /5,46/.

Le modèle de MARX-KILLEEN en traitant les électrons de façon paramétrique introduit bien évidemment une erreur difficilement appréciable dans les évaluations de Q. Toutefois, en supposant que l'erreur commise était systématique, MARX /32/ a établi que l'hypothèse "square-well" avait pour effet principal

d'augmenter Q de moins de 10%.

Le modèle de MARX-KILLEEN /20/ a également permis de montrer (voir aussi /25/) qu'une source très anisotrope en angle pouvait augmenter $\overline{n\tau}$ de 20 à 40 %.

CHAPITRE III

EFFETS DES COLLISIONS COULOMBIENNES ET DES BOUCHONS H.F. SUR
DES PLASMAS A ELECTRONS CHAUDS

III - 1. CONFINEMENT DES IONS PAR UN POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

Parmi les causes de la rapide fuite des ions hors d'une configuration magnétique à miroirs, une des plus importantes paraissait être /10/ (et Chapitre II) l'accélération des ions par le champ électrostatique dérivé du potentiel ambipolaire. Plusieurs procédés ont été proposés /12, 13, 14/ pour annuler l'effet de ce potentiel ambipolaire, parmi lesquels la création d'un potentiel ambipolaire négatif qui au contraire confinerait les ions. Dans ce cas les surfaces de pertes des particules deviennent l'inverse de ce qu'elles étaient en présence d'un potentiel positif (voir Figure 2) : celle des ions devient un hyperboloïde à deux feuilletts et celles des électrons un hyperboloïde à un feuillet.

Le potentiel ambipolaire se crée pour équilibrer les pertes des deux espèces, il suffit donc pour inverser le signe du potentiel d'augmenter le temps de vie des électrons et pour cela le plus simple est d'accroître suffisamment leur énergie. D'après les évaluations de KAUFMAN /11/ (et Annexe II) il semblait que le potentiel devînt négatif pour

$$E_e/E_i > (m_i/m_e)^{1/3} \quad (3-1)$$

Cette expression impose des énergies électroniques largement supérieures aux énergies ioniques. Pour en partie éviter cela, CONSOLI /13/ a proposé de créer le potentiel négatif en augmentant le temps de vie des électrons par des bouchons H.F. gyrorésonnants près de la fréquence cyclotron des électrons.

Une évaluation des bilans énergétiques, à partir d'expressions analytiques des temps de vie /23/, a permis d'établir qu'il n'était pas réaliste d'envisager qu'une configuration magnétique à miroirs puisse avec un potentiel négatif conduire à un réacteur thermonucléaire ayant un bilan énergétique positif.

Cependant les plasmas à électrons chauds pouvant servir à l'étude de certains phénomènes fondamentaux telle l'interaction des plasmas avec les champs H.F. ou tel l'effet stabilisant de ceux-ci sur certaines micro-instabilités /47/, il nous a semblé intéressant d'étudier plus précisément les effets des collisions Coulombiennes sur ce type de plasma /22/.

III - 2. CHOIX D'UN MODELE THEORIQUE

Une évaluation précise du potentiel ambipolaire nécessite la connaissance des pertes ioniques et électroniques et donc la solution de deux équations de F.P. D'autre part comme nous souhaitons calculer avec précision les conditions nécessaires à l'inversion du potentiel ambipolaire, il est souhaitable de choisir les mêmes hypothèses simplificatrices pour résoudre les deux équations. Cela n'est le cas ni dans le modèle de KILLEEN et MARX /33/, ni dans notre modèle tenant compte des anisotropies des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH (voir chapitre IV). C'est pour cela que nous avons repris les hypothèses désormais "classiques" de FOWLER et RANKIN /10/.

1) Les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH sont réduits à leurs seules parties isotropes.

2) Dans les fonctions de distribution les variables sont séparables et la partie angulaire de la fonction de distribution est fonction propre de l'opérateur de Legendre avec pour valeur propre $-1/\log_{10}R$ (voir équation 2-15).

3) Pour tenir compte du potentiel ambipolaire, nous remplaçons $-1/\log_{10}R$ par $-1/\log_{10}R_{\text{eff}}^{(v)}_{(i,e)}$ (voir équation 2-22).

4) Enfin nous avons cherché à évaluer l'effet des bouchons H.F. Bien que de récents travaux aient établi que l'effet de la H.F. était sans doute moins bénéfique /48, 49, 50/, nous avons supposé que dans le meilleur des cas en négligeant le chauffage et le déphasage dûs à la H.F., l'effet de celle-ci pouvait être

représenté par un potentiel V^* équivalent à un potentiel électrostatique positif qui n'agirait que sur les électrons et que nous ajouterons à ϕ_0 dans l'expression de $R_{\text{eff}}^{(v)}_{(e)}$ (équation 2-22).

L'expression de V^* en fonction de l'amplitude du champ H.F. est /23/

$$eV^* = (\bar{R} - 1) \frac{\pi}{4} m_e c^2 \left(\frac{\delta\omega}{c} \right)^{-1} g^2 \left(\frac{v_e}{c} \right)^{-1} \quad (3-1 \text{ bis})$$

où $\bar{R}$ est le rapport entre le maximum et la valeur de gyrorésonance du champ magnétique, δ le gradient du champ magnétique et

$$g = eE/m_e \omega_{ce}$$

Afin de résoudre les équations de F.P. il est nécessaire de les écrire dans des variables sans dimension, pour cela nous avons défini une vitesse caractéristique pour chaque espèce de particules v_{ci} et v_{ce} , égales aux vitesses quadratiques moyennes des termes de source; un temps caractéristique

$$t_c = 10^5 \left(\frac{m_i}{m_p} \right)^{1/4} E_{is}^{3/4} \sqrt{j}$$

et une densité caractéristique $n_c = j \times t_c$

Dans ces expressions m_p est la masse du proton et m_i celle des ions considérés (en fait tous nos résultats ont été obtenus pour des plasmas d'hydrogène : $m_i = m_p$), j est le courant d'injection c'est-à-dire le nombre de particules injectées dans un cm^3 de plasma pendant une seconde, E_{is} est l'énergie en keV avec laquelle les ions sont injectés dans le plasma.

Dans ce travail les énergies sont définies par

$$E_{i,e} = \frac{1}{2} m_{i,e} v_{i,e}^2 \quad (3-2)$$

$$E_{i,e,s} = \frac{1}{2} m_{i,e} \overline{v_{i,e,s}^2}$$

avec

$$\overline{v_{i,e}^2} = \int_0^\infty f_i(v) v^4 dv / \int_0^\infty f_i(v) v^2 dv \quad (3-3)$$

$$\overline{v_{i,e,s}^2} = \int_0^\infty S_i(v) v^4 dv / \int_0^\infty S_i(v) v^2 dv$$

Avec les variables sans dimension et en prenant pour la coupure à la longueur de Debye l'expression classique (2-6) l'équation d'évolution des ions s'écrit alors (2-12, 2-5 bis, 2-9, 2-22).

$$\frac{1}{4\pi G_i} \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(x_i) = c_i(x_i) f_i(x_i) + B_i(x_i) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i) + A_i(x_i) \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(x_i) \quad (3-4)$$

$$- P_i(x_i) f_i(x_i) / \log_{10} R_{eff} + S_i(x_i) / 4\pi G_i$$

où

$$c_i(x_i) = f_i(x_i) + \frac{m_i}{m_e} f_e(x_i) \quad (3-5)$$

$$B_i(x_i) = \left(\frac{m_i}{m_e} - 1\right) N_i(x_i) / x_i^2 - K_1(x_i) / x_i^2 - K_3(x_i) / 3 x_i^4 + 2/3 H(x_i) / x_i$$

$$A_i(x_i) = K_3(x_i) / 3 x_i^3 + H(x_i) / 3$$

$$P_i(x_i) = K_1(x_i) / 2 x_i^3 - K_3(x_i) / 6 x_i^5 + H(x_i) / 3 x_i^2$$

$$K_1(x_i) = \int_0^{x_i} x_i'^2 (f_e(x_i') + f_i(x_i')) dx_i'$$

$$K_3(x_i) = \int_0^{x_i} x_i'^4 (f_e(x_i') + f_i(x_i')) dx_i'$$

$$H(x_i) = \int_{x_i}^\infty x_i' (f_e(x_i') + f_i(x_i')) dx_i'$$

$$N_i(x_i) = \int_0^{x_i} x_i'^2 f_e(x_i') dx_i'$$

La quantité G_i est égale à : /25/

$$G_i = (1 + 0,1019 \log_{10} (E_e) - 0,034 \log_{10} (n)) / 1,03 \quad (3-6)$$

La fonction de distribution de la source est de la forme

$$S_i(x_i) = \frac{(k_i + 1,5)(k_i + 1,5)}{2\pi^{1,5} \times 0,5 \times 1,5 \times (k_i + 0,5)} x_i^{(2k_i)} e^{(k_i + 1,5)x_i^2} \quad (3-7)$$

Le paramètre k_i nous permet de choisir la largeur de la source

$$\langle (\Delta x_i)^2 \rangle = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle = 1 - \frac{k_i + 1,5}{\pi} \left(\frac{k_i!}{0,5 \times 1,5 \times (k_i + 0,5)} \right)^2 \quad (3-8)$$

Le terme de source satisfait aux deux conditions de normalisation.

$$4\pi \int_0^\infty S_i(x_i) x_i^2 dx_i = 1 \quad (3-9)$$

$$4\pi \int_0^\infty S_i(x_i) x_i^4 dx_i = 1$$

Pour les électrons nous avons une équation similaire à (3-4) en inversant dans (3-4) et (3-5) les indices i et e et en posant

$$G_e = G_i \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} (E_i/E_e)^{3/2} \quad (3-10)$$

Nous avons résolu les deux équations de F.P. (3-4) par un schéma numérique dépendant du temps, en calculant le potentiel ambipolaire à chaque instant (voir Annexe IV).

III - 3. EFFETS DES COLLISIONS COULOMBIENNES EN L'ABSENCE DE H.F.

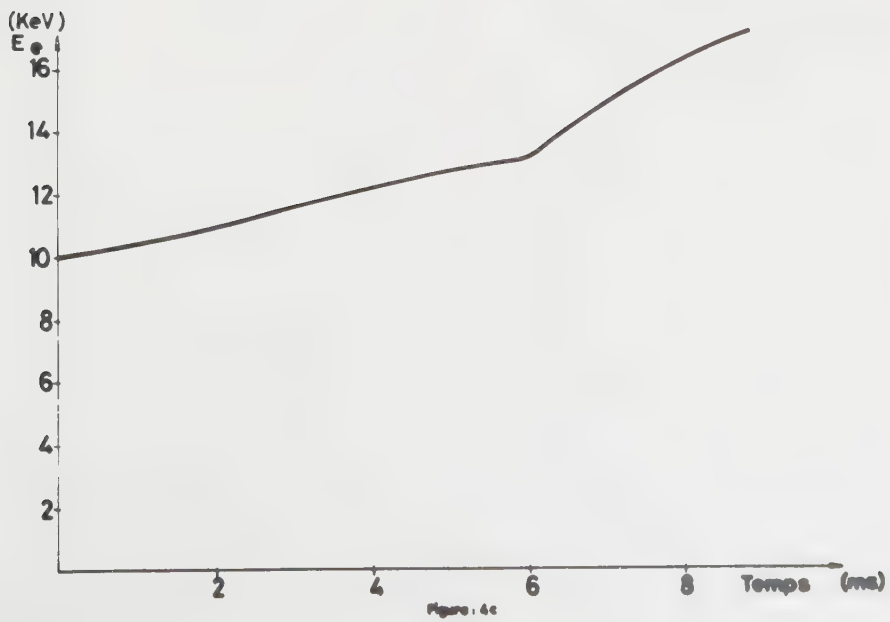
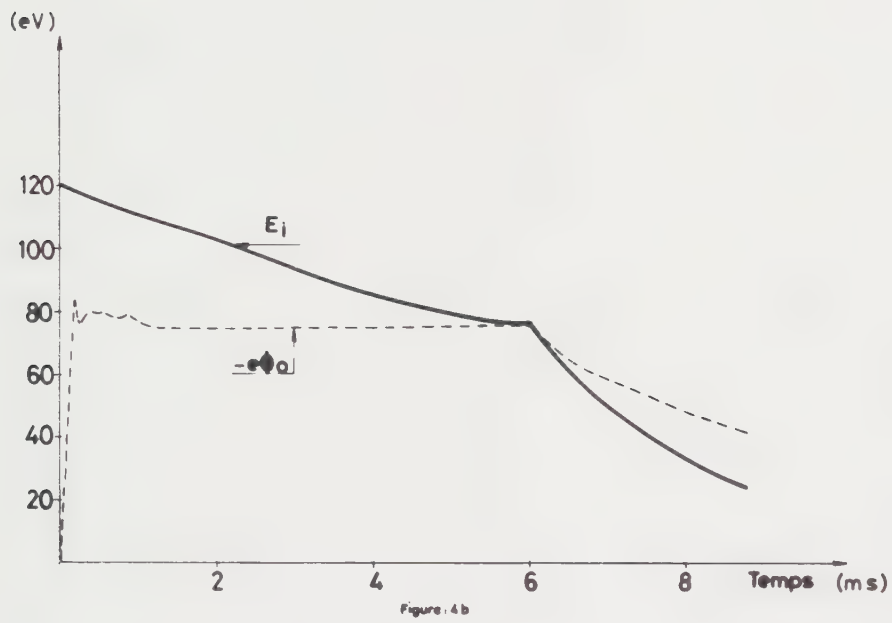
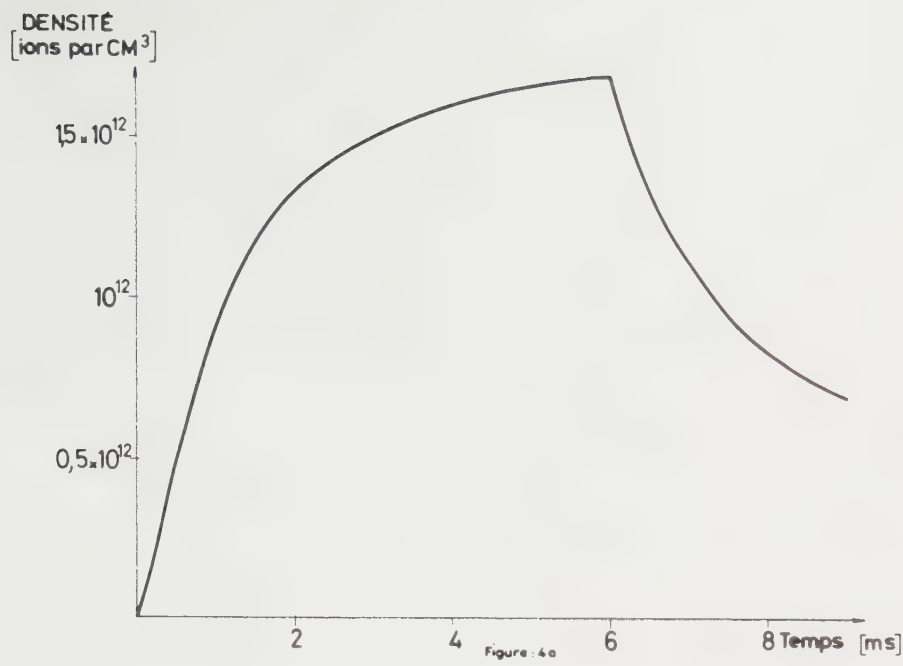
Nous avons simulé le comportement dans le temps des plasmas à électrons chauds pour différentes conditions initiales. Nous donnons en Figure 4 l'évolution dans le temps de la densité, du potentiel ambipolaire et des énergies ioniques et électroniques à partir des conditions initiales suivantes

$$E_{i,s} = 120 \text{ eV}, \quad E_{e,s} = 10 \text{ keV}, \quad R = 1,7 \quad j = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Au bout de 6 ms nous supposons que l'injection des particules est arrêtée et posons $j = 0$. Nous donnons aussi (Figure 5) les termes de source et les fonctions de distribution à $t = 6 \text{ ms}$. Nous voyons que la fonction de distribution des ions qui d'autre part ne dépend pas de la largeur de la source ionique, est une maxwellienne.

Nous pouvons remarquer que pour les plasmas à ions chauds, au contraire, la fonction de distribution des électrons est une maxwellienne /20/ (et Chapitre II) et la fonction de distribution des ions ressemble à celle obtenue pour les électrons dans le cas des plasmas à électrons chauds (voir Chapitre IV).

En faisant varier les différentes conditions initiales $R, j, E_{i,s}$ et $E_{e,s}$,



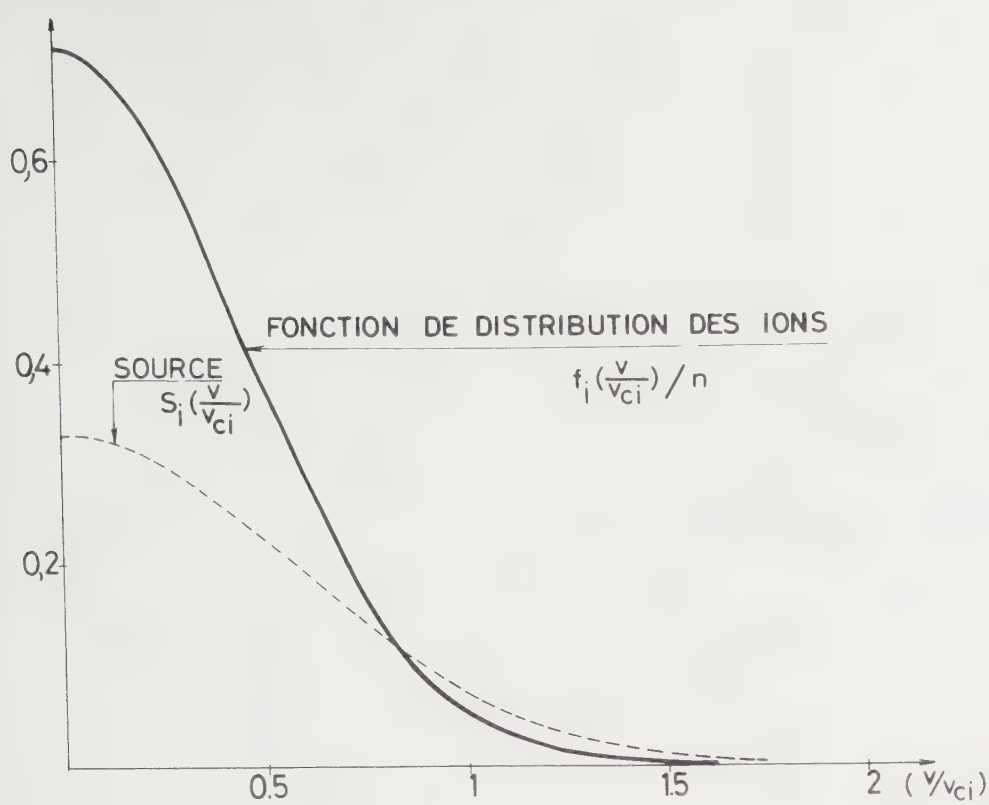


Figure : 5 a

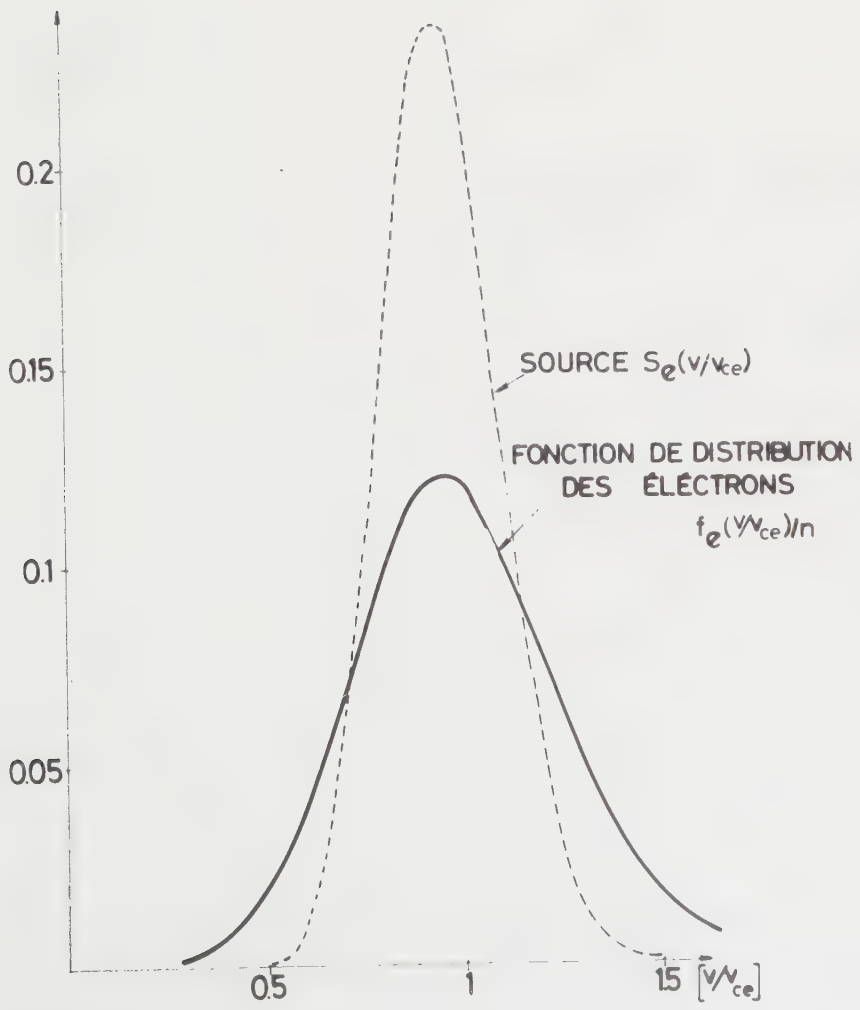


Figure : 5 b

nous avons pu mettre en évidence un certain nombre de propriétés simples des plasmas à électrons chauds. En introduisant le temps de décroissance exponentiel de la densité τ_e , tel que $n(\tau_e) = (1 - 1/e) n(\infty)$ où $n(\infty)$ est la valeur asymptotique de la densité, nous trouvons que τ_e et $n(\infty)$ sont indépendants du potentiel ambipolaire et de l'énergie des ions et peuvent s'exprimer

$$\tau_e = c_1 \times E_{es}^{3/2} \times (\log_{10} R/j)^{1/2} \quad (3-11)$$

$$n(\infty) = c_2 \times E_{es}^{3/4} \times (\log_{10} R \times j)^{1/2}$$

avec pour l'hydrogène

$$c_1 = 2,76 \times 10^3 \text{ et } c_2 = 1,95 \times 10^4$$

Les valeurs du potentiel ambipolaire sont toujours très inférieures à l'énergie des électrons (voir Figure 6-c); il est donc naturel, la correction introduite dans $\log_{10}(R_{eff})$ étant faible, que le potentiel ambipolaire n'affecte pas sérieusement le comportement des électrons. D'autre part, tous les électrons ont une vitesse supérieure à $v_m = (-2 e \Phi_0 / m_e (R-1))^{1/2}$

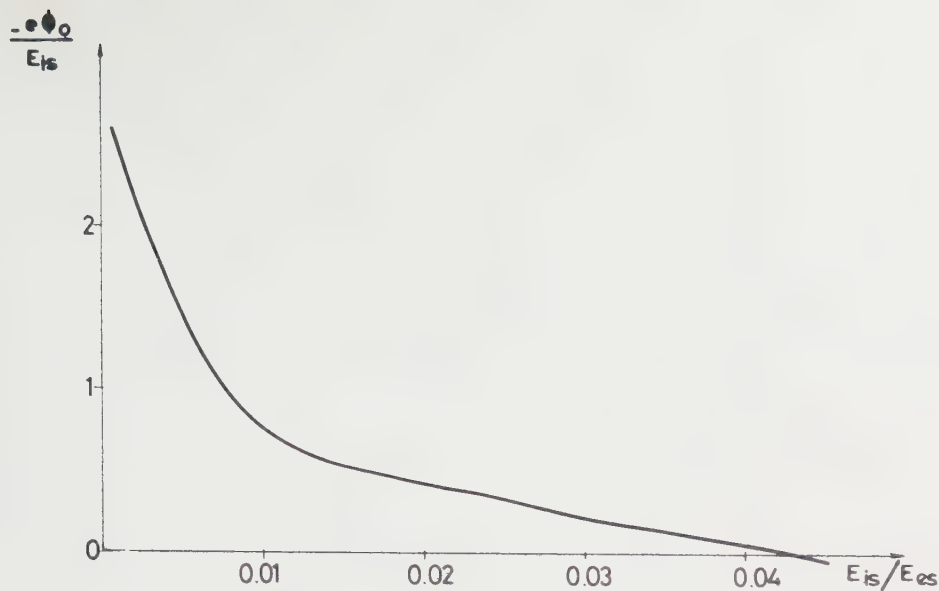


Figure : 6 a

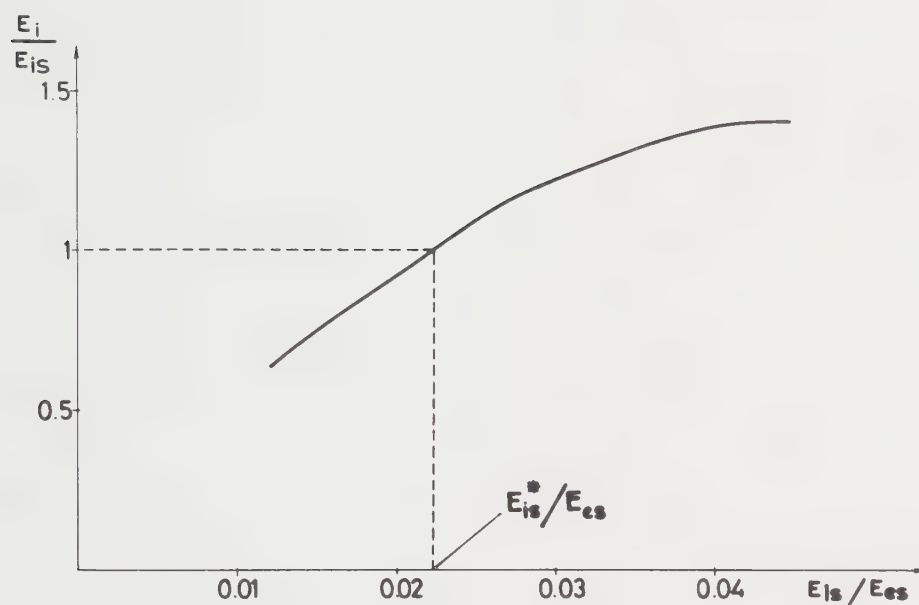


Figure : 6 b

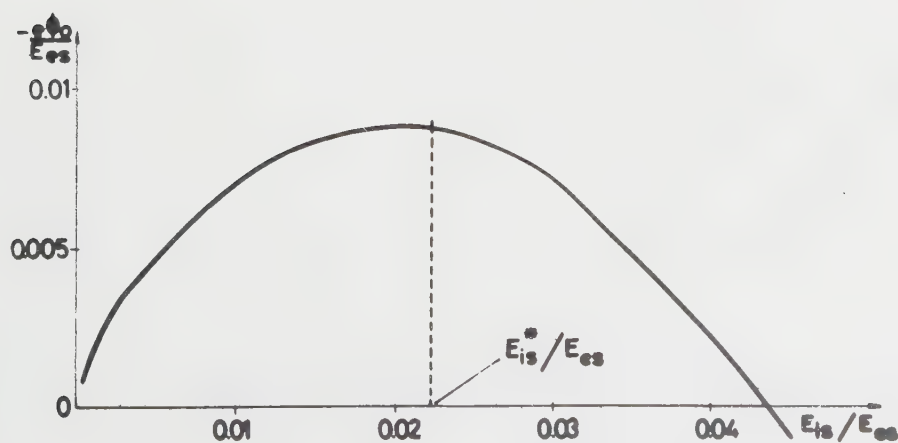


Figure : 6 c

. Puisque v_m est en général beaucoup plus grand que la vitesse quadratique des ions, nous pouvons voir au travers des expressions (3-5) que pour les collisions électron-ion, les ions paraissent froids.

Afin de comparer nos résultats avec ceux obtenus dans le cas des plasmas à ions chauds, nous exprimons le facteur

$$\overline{n\tau} = n(\infty)^2/j \text{ en introduisant le rapport de masse approprié}$$

$$\overline{n\tau} = 1.63 \times 10^{10} \times \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{1/2} \times E_{es}^{3/2} \times \log_{10} R \quad (3-12)$$

Dans le cas des plasmas à ions chauds (voir table 1), POST /1/ (à partir des calculs de ROBERTS et CARR /3/) et FOWLER-RANKIN /10/ donnent pour $\overline{n\tau}$:

$$\overline{(n\tau)}_{\text{Post}} = 1,23 \times 10^{11} \left(\frac{m_i}{m_p}\right)^{1/2} \times E_{is}^{3/2} \times \log_{10} R \quad (3-13)$$

$$\overline{(n\tau)}_{\text{F.R.}} = 1,48 \times 10^{10} \times \left(\frac{m_i}{m_p}\right)^{1/2} \times E_{is}^{3/2} \times \log_{10} R$$

Nous avons vu (chapitre 2) que les valeurs de POST sont obtenues en ne tenant compte que des collisions ion-ion et que les valeurs de FOWLER et RANKIN /10/ étaient environ 8 fois plus faibles que celle de POST, à cause de l'effet du potentiel ambipolaire et des collisions ion-électron.

Pour les plasmas à électrons chauds $\overline{n\tau}$ est principalement déterminé par les collisions subies par les électrons. Si dans l'expression de POST (3-13) nous remplaçons l'énergie d'injection et la masse des ions par celles des électrons, nous obtenons une valeur de $\overline{n\tau}$ qui ne tient compte que des collisions électron-électron. Nous voyons (3-12) que les collisions élec-

tron-ion réduisent, dans le cas d'un plasma à électrons chauds $\overline{n\tau}$ par à peu près un facteur 7.

Nous avons constaté que les valeurs du potentiel ambipolaire obtenues étaient très largement inférieures aux résultats de KAUFMAN /10/ et (Annexe II) et que la condition pour que le potentiel ambipolaire s'annule était

$$E_e = 1,8 \times E_i \times \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3} \quad (3-14)$$

qui diffère d'un facteur 1,8 de la condition obtenue par KAUFMAN /11/. Afin d'expliquer ces désaccords nous avons calculé le potentiel ambipolaire par des formules analytiques semblables à celle de KAUFMAN, mais en tenant compte pour l'expression des pertes électroniques des collisions électron-électron et électron-ion. Nous avons trouvé un bien meilleur accord avec nos résultats numériques (voir Annexe II).

Nous avons trouvé que le potentiel ambipolaire dépendait assez peu du rapport de miroir. Pour $E_{is} = 120$ eV, $E_{es} = 10$ keV nous obtenons avec $R = 1,7$, $e\phi_0 = 76,1$ eV et avec $R = 10,25$ $e\phi_0 = -98,9$ eV.

Enfin pour une valeur donnée de E_{es} , il existe une valeur de l'énergie d'injection des ions E_{is}^* pour laquelle $-e\phi_0$ est maximum (voir Figure 6-c). Toutefois le rapport $-e\phi_0/E_i$ qui entre dans l'expression des pertes ioniques (Annexe II) croît de façon monotone, cela signifie que le confinement augmente toujours quand E_{is} décroît. La Figure 6b montre que pour $E_{is} < E_{is}^*$ l'énergie des ions confinés est plus faible que l'énergie des ions injectés. Cela est dû au fait que pour des

valeurs suffisamment grandes de $-e\phi_0/E_i$, le confinement des ions froids par le potentiel ambipolaire, l'emporte sur l'effet de réchauffement causé par la fuite préférentielle des particules froides due à la dépendance en v^3 des temps de déflexion /36/.

III - 4. EFFETS DES BOUCHONS H.F. ET DU POTENTIEL AMBIPOLAIRE

Considérons maintenant l'effet des bouchons H.F. à la fréquence cyclotron des électrons. Les électrons injectés par un des miroirs gagnent de l'énergie perpendiculaire en passant pour la première fois à travers la zone de résonance /51/. Aux passages suivants si l'énergie des électrons est suffisamment élevée, leurs trajectoires ne doivent pas être modifiées par la H.F. /48/. Au contraire, les électrons d'énergie inférieure à eV^* venant d'une région où le champ magnétique est plus faible, peuvent être réfléchis par la H.F.. Si certaines conditions se trouvent remplies /52/, l'énergie et le moment magnétique doivent être en moyenne conservés. Nous donnons en Figure 7 les valeurs de la densité, des énergies et du potentiel ambipolaire obtenus pour différentes valeurs de V^* et pour des conditions initiales semblables à celles que l'on s'attend à obtenir dans l'expérience CIRCE 25 kW /24/ :

$$R = 1,7, j = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, E_{es} = 3 \text{ keV}, E_{is} = 36 \text{ eV} \text{ et}$$

$$t = 0,55 \text{ ms.}$$

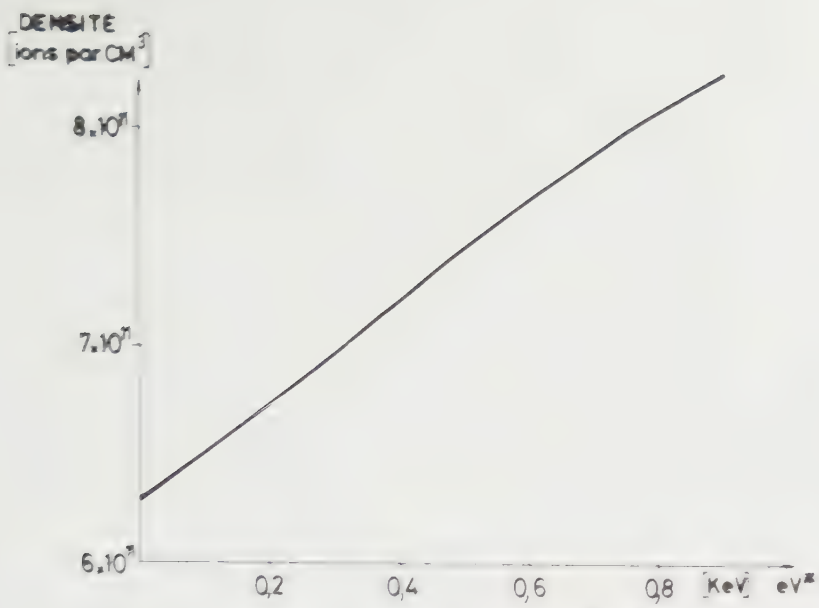


Figure 7a

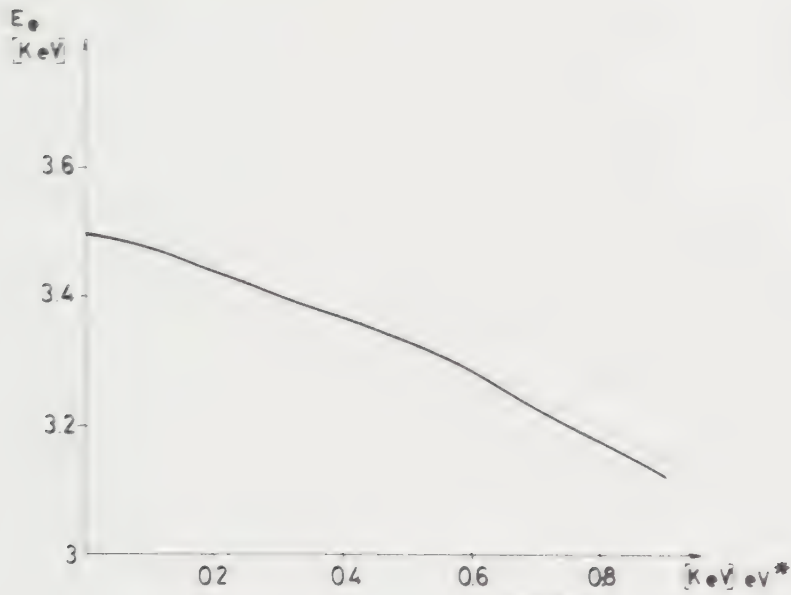


Figure 7b

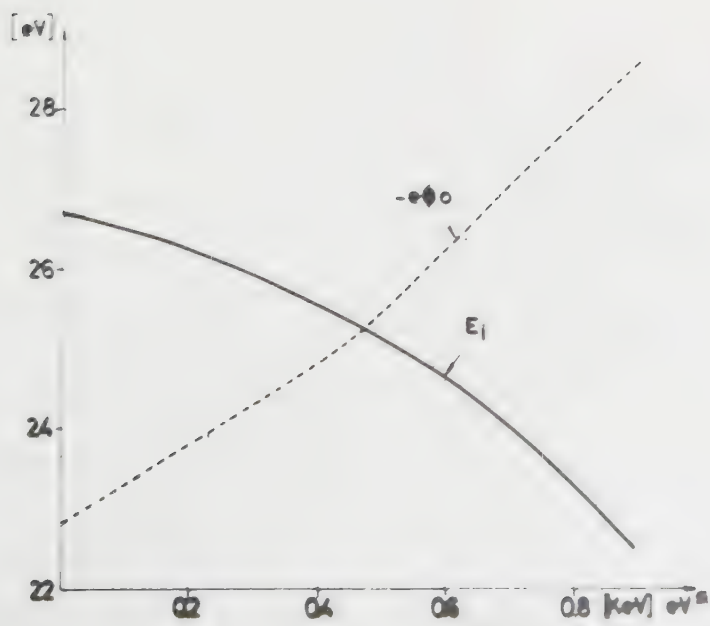


Figure 7c

Nous voyons (figures 7 -a et 7 -c) que la densité et la valeur absolue du potentiel ambipolaire augmentent avec V^* . Comme l'augmentation du V^* et du potentiel ambipolaire amènent un accroissement du confinement qui affecte principalement les particules froides, il n'est pas surprenant de constater que la présence d'un V^* pour des énergies d'injection données, abaisse les énergies des particules confinées (voir Figures 7-a, 7-c).

Enfin nous avons voulu tenir compte du fait que des ions injectés froids par un des miroirs étaient accélérés par le potentiel ambipolaire avant d'atteindre la région où le champ magnétique est minimum. D'après l'hypothèse "square well" (voir Chapitre II) l'énergie des particules injectées comme celle des particules piégées, doit être prise à l'endroit où le champ magnétique est minimum. C'est pour cela qu'en supposant que l'énergie due à l'accélération du potentiel ambipolaire ne reste pas uniquement transverse, nous avons posé que l'énergie d'injection des ions variait avec le temps suivant la formule

$$E_{is}(t) = E_{is}(t=0) - e\phi_0(t) \quad (3-15)$$

Nous donnons en Figure 8 l'évolution dans le temps de $E_i(t)$ et $-e\phi_0(t)$, lorsque E_{is} est elle-même une fonction du temps. Nous avons choisi deux valeurs de V^* , $V^* = 0$ (Figure 8-a) et $V^* = 270$ eV (Figure 8-b), avec $R = 1,7, j = 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, E_{es} = 3 \text{ keV}$ et $E_{is}(t=0) = 2 \text{ eV}$. Nous voyons que $|e\phi_0|$ atteint rapidement

un maximum et puis décroît. Bien entendu, cette décroissance amène une décroissance de $E_{is}(t)$ puis de $E_i(t)$. Cette décroissance du potentiel ambipolaire est en accord avec le fait qu'un accroissement du confinement et donc de $-e\phi_0/E_i$ correspond dans certains cas à un abaissement de $-e\phi_0$ (voir Figures 6-a,6-c)

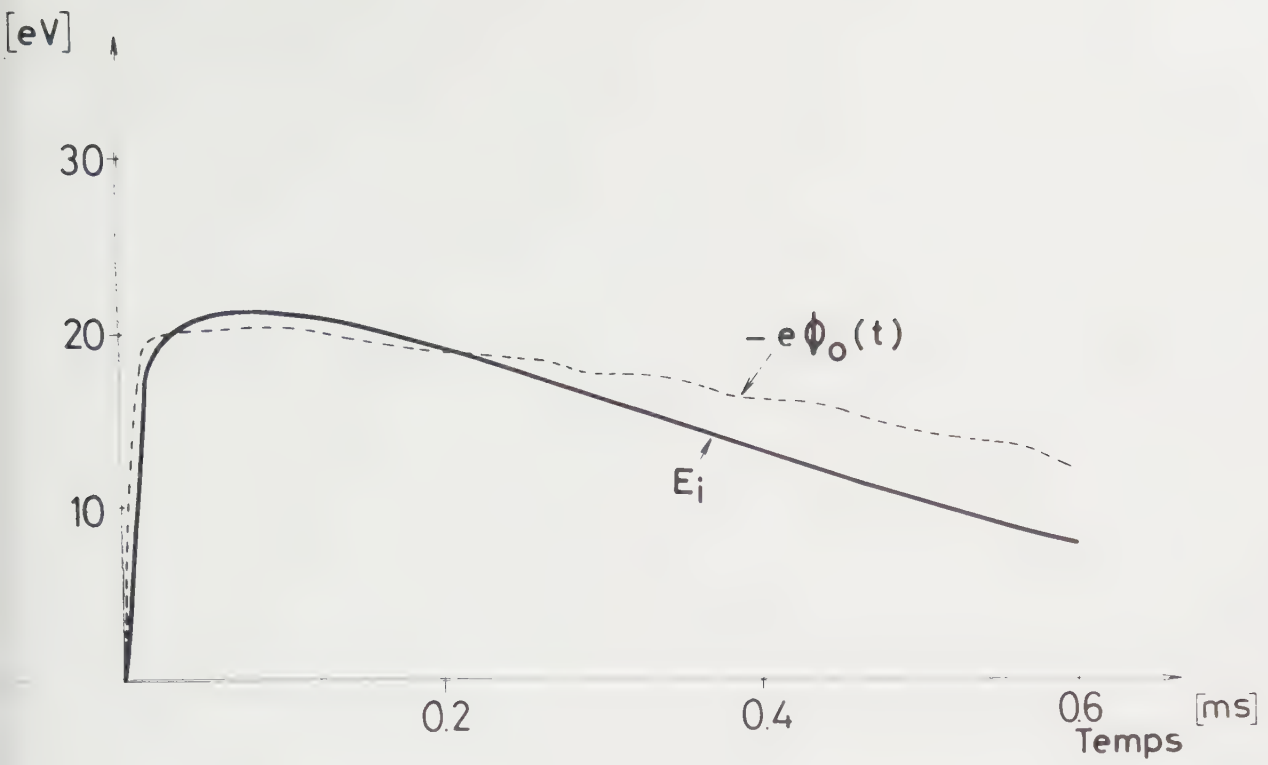


Figure : 8 a

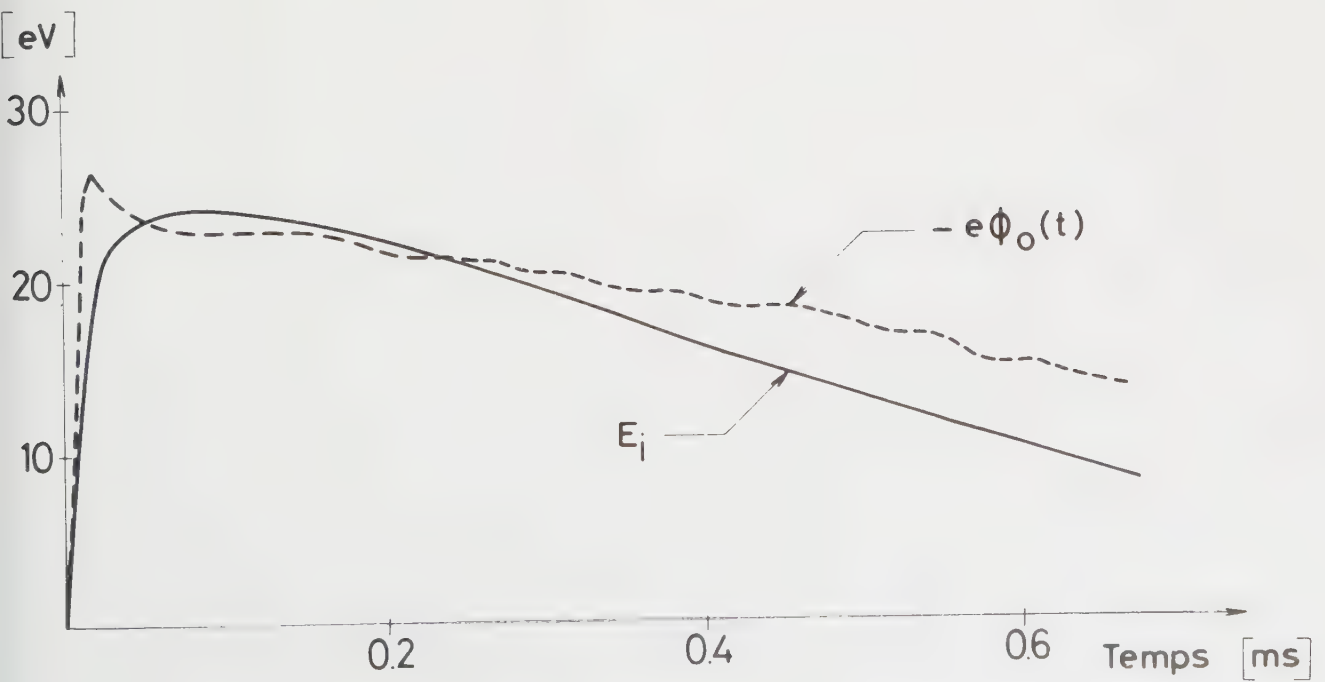


Figure : 8 b

CHAPITRE IV

RESOLUTION D'EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK AVEC DES COEFFICIENTS
ANISOTROPES

IV - 1. MOTIVATION ET CHOIX D'UN SYSTEME DE COORDONNEES

Nous avons vu au chapitre II que les plus récentes évaluations du facteur Q ont été obtenues à partir de solutions de plusieurs équations de F.P. couplées entre elles, mais pour des fonctions de distribution à variables séparées et avec des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH réduits à leurs seules parties isotropes.

Les résolutions d'équations de F.P. pour une seule espèce de particules /30/ ont montré que ces hypothèses conduisaient à des valeurs de $\overline{n\tau}$ et donc de Q , assez largement inférieures à celles obtenues par des résolutions d'équations en deux dimensions /3/ (voir chapitre II). En effet, on peut dire que l'hypothèse d'isotropisation des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH revient à supposer que les particules tests ont des collisions avec des particules cibles dont les fonctions de distribution sont isotropes. Dans la réalité les fonctions de distribution des particules cibles sont fortement anisotropes et donc la probabilité de diffusion des particules tests dans la zone de perte est moindre.

La résolution d'équations de F.P. en deux dimensions pour les ions et les électrons se heurtant à de très sérieuses difficultés numériques (voir chapitre II et Annexe 4), nous avons cherché à mettre au point un modèle théorique qui nous permettrait

- 1) de tenir compte des anisotropies des pseudo-potentiels

de ROSENBLUTH.

2) de représenter les anisotropies des fonctions de distribution des ions de façon plus précise que par le seul premier mode de BEN-DANIEL /25/

3) de nous ramener à un système d'équations ne dépendant que d'une variable dans l'espace des vitesses et donc pouvant être résolues par un schéma numérique implicite (voir Annexe IV).

Pour représenter les anisotropies des fonctions de distribution, un développement en fonctions propres de BEN-DANIEL /25/ (et chapitre II) paraît particulièrement bien adapté. Malheureusement en présence d'un potentiel ambipolaire ces fonctions qui s'annulent sur l'hyperboloïde de perte vont dépendre de v . Pour éviter cette difficulté E. CANOBBIO nous suggéra de remplacer les coordonnées usuelles (v, μ) par un couple de coordonnées de telle façon que la projection dans le plan $(v_{||}, v_{\perp})$ de l'hyperboloïde de perte soit une ligne de coordonnées constante. Parmi tous les couples de coordonnées possibles le plus adapté est vraisemblablement /53,54/

$$u_a = (v_a^2 - \alpha_a^2)^{1/2} \quad (4-1)$$

$$\xi_a = v\mu/u_a$$

$$\text{avec } \alpha_a^2 = 2 Z_a e \phi_0 / \left(m_a (R-1) \right) \quad (4-2)$$

Nous voyons que l'expression de ces nouvelles coordonnées dépend de la masse et de la charge des particules a .

L'hyperboloïde de pertes des ions d'espèce a, a pour équation $\xi_a = \xi_c$ avec $\xi_c = (R - 1/R)^{1/2}$ (voir Figure 9) et le point où cette hyperboloïde coupe l'axe $v_\perp$ pour coordonnées ($u_a = 0, \xi_a = 0$).

Avec ce système de coordonnées, l'équation de F.P.

devient en négligeant l'indice a (Voir annexe 1)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = & -\frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[f \left\{ (u^2 + \alpha^2) \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\alpha^2 \xi \partial h}{u \partial \xi} \right\} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f \left\{ -\frac{\alpha^2 \xi}{u} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{(u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2) \partial h}{u^2} \frac{\partial h}{\partial \xi} \right\} \right] \right. \\
 & + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[f \left\{ \frac{(u^2 + \alpha^2)^2 \partial^2 g}{u^2} - \frac{\alpha^2 (u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial g}{\partial u} - 2\alpha^2 \xi \frac{(u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} + \frac{3\alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2)}{u^4} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \alpha^4 \frac{\xi^2}{u^4} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left[f \left\{ \alpha^2 \frac{(u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{(\alpha^4 + 2u^4)}{u^4} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{2\alpha^4 \xi}{u^4} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} + \xi \frac{(3\alpha^4 + 2u^4)}{u^5} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(\alpha^4 \xi^2 - \alpha^2 u^2 \xi^2 - u^4 + u^4 \xi^2)}{u^5} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial u \partial \xi} \left[f \left\{ -\frac{\alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\alpha^4 \xi}{u^4} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 + 2\alpha^4 \xi^2}{u^4} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(-u^4 + u^4 \xi^2 - \alpha^2 u^2 - 3\alpha^4 \xi^2)}{u^5} \frac{\partial g}{\partial \xi} - \frac{\alpha^2 \xi (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2) \partial^2 g}{u^5} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[f \left\{ -\frac{3\alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2)}{u^4} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \xi \frac{(3\alpha^4 + 2u^4)}{u^5} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{2(u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 + 3\alpha^4 \xi^2)}{u^5} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{(2u^4 + 2\alpha^2 u^2 + 9\alpha^4 \xi^2)}{u^6} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \xi \frac{(u^4 - u^4 \xi^2 - 2\alpha^2 u^2 + 3\alpha^2 u^2 \xi^2 - 3\alpha^4 \xi^2) \partial^2 g}{u^6} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right\} \right] \\
 & + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[f \left\{ \frac{\alpha^4 \xi^2 \partial^2 g}{u^4} + \frac{(u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 \xi^2 - \alpha^4 \xi^2) \partial g}{u^5} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{2\alpha^2 \xi (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)}{u^5} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \xi \frac{(-u^4 + u^4 \xi^2 + 2\alpha^2 u^2 - 3\alpha^2 u^2 \xi^2 + 3\alpha^4 \xi^2)}{u^6} \frac{\partial g}{\partial \xi} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{(u^4 - 2u^4 \xi^2 + u^4 \xi^4 + 2\alpha^2 u^2 \xi^2 - 2\alpha^2 u^2 \xi^4 + \alpha^4 \xi^4)}{u^6} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

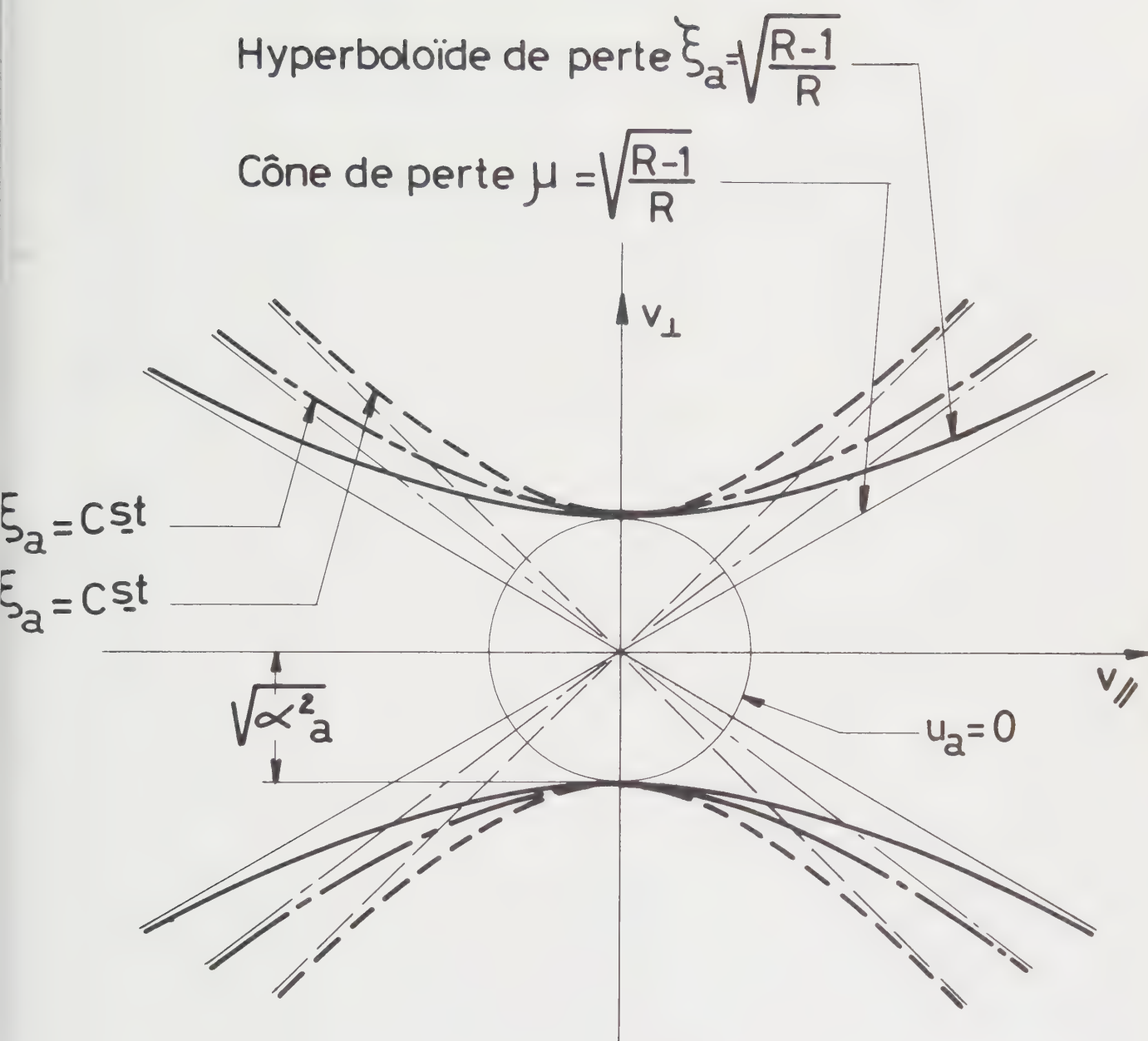


Figure : 9

Avec ce système de coordonnées nous pouvons exprimer la fonction de distribution en fonction de BEN-DANIEL :

$$f_a(u_a, \xi_a) = \sum_{j=1}^N U_{a,j}(u_a) M_j(\xi_a) \quad (4-3)$$

Cependant si ces coordonnées sont particulièrement adaptées pour les ions dont l'hyperboloïde de pertes est à une nappe, il n'en est rien pour les électrons dont l'hyperboloïde est à deux nappes (voir Figure 2). En effet pour $v < (2e\phi_0/m_e)^{1/2}$ la limite d'intégration supérieure sur ξ_e devient fonction de l'énergie $\xi_e = v/u_e$

IV - 2. EXPRESSIONS DES PSEUDO-POTENTIELS DE ROSENBLUTH ET REDUCTION DES EQUATIONS.

Nous avons vu (équation 2-9) que l'on pouvait développer les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH en polynômes de Legendre. Il suffit pour cela de projeter la fonction de distribution des particules d'espèce a sur la base formée par les premiers polynômes de Legendre. Pour chaque valeur de u_a nous avons fait cette projection (voir équation 2-8).

$$V_{a,2i}(v) = \sum_{j=1}^N U_{a,j}(u_a) \int_0^{u_a \xi_c/v} P_{2i}(\mu) M_j(\xi_a) d\mu / \int_0^1 \left[P_{2i}(\mu) \right]^2 d\mu \quad (4-4)$$

Rappelons que les termes d'ordre impair sont tous nuls à cause des symétries des fonctions de distribution (voir chapitre II).

Les polynômes de Legendre peuvent s'exprimer simplement

$$P_{2i}(\mu) = \sum_{k=0}^i c_{i,k} \mu^{2k} \quad (4-5)$$

Dans l'équation (4-4), en faisant le changement de variable de μ en $\xi_a = v_a \mu / u_a$, nous obtenons :

$$V_{a,2i}(v) = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{k=0}^i I_{j,k} c_{i,k} \left(\frac{u_a}{v_a} \right)^{2k+1} \right] U_{a,j}(u_a) / \int_0^1 \left[P_{2i}(\mu) \right]^2 d\mu \quad (4-6)$$

avec

$$I_{j,k} = \int_0^{\xi_c} M_j(\xi) \xi^{2k} d\xi \quad ; \quad (4-7)$$

En utilisant les formules (2-4, 2-9 et 2-10), nous obtenons aisément les expressions dans l'espace (v, μ) des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH

$$g_a(v, \mu) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \log_e \Lambda_{ab} \sum_{i=0}^M G'_{b,2i}(v) P_{2i}(\mu) \quad (4-8)$$

$$h_a(v, \mu) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \frac{m_a + m_b}{m_b} \log_e \Lambda_a \sum_{i=0}^M H'_{b,2i} P_{2i}(\mu)$$

Ces pseudo-potentiels peuvent dans l'espace (u_a, ξ_a) s'exprimer simplement en puissances paires de ξ_a

$$g_a(u_a, \xi_a) = \sum_{i=0}^M \xi_a^{2i} g_{a,i}(u_a) \quad (4-9)$$

$$h_a(u_a, \xi_a) = \sum_{i=0}^M \xi_a^{2i} h_{a,i}(u_a)$$

avec

$$g_{a,i}(u_a) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \log_e (\Lambda_{a,b}) \left(\frac{v^2}{u_a^2}\right)^i \sum_{k=0}^M C_{k,i} G'_{b,2i}(v) \quad (4-10)$$

$$h_{a,i}(u_a) = \sum_b \left(\frac{z_b}{z_a}\right)^2 \frac{m_a + m_b}{m_b} \log_e (\Lambda_{a,b}) \sum_{k=0}^M C_{k,i} H'_{b,2i}(v) \left(\frac{v^2}{u_a^2}\right)^i$$

avec si $k > i$ $C_{k,i} = 0$

Portons dans l'équation (4-2) les définitions des fonctions de distribution (4-3) et des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH (4-9). Puis multiplions l'équation (4-2) par $2 u_a^2 M_i(\xi_a)$ et intégrons de 0 à ξ_c . Avec les définitions

$$\begin{aligned} N_{i,j,n} &= \int_0^{\xi_c} M_i(\xi) M_j(\xi) \xi^{2n} d\xi \\ X_{i,j,n} &= \int_0^{\xi_c} M_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} (M_j(\xi) \xi^{2n+1}) d\xi \\ Y_{i,j,n} &= \int_0^{\xi_c} M_i(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (M_j(\xi) \xi^{2n}) d\xi \end{aligned} \quad (4-11)$$

l'équation (4-2) se transforme en N équations couplées qui ne dépendent plus que de la variable u_a

$$\begin{aligned} \frac{2u_a^2}{T_a} \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_{a,i}(u,t)) \right)_c N_{i,i,0} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial u_a^2} (DD_{i,j}(u_a) u_{a,j}(u_a)) \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial u_a} (D_{i,j}(u_a) u_{a,j}(u_a)) + \sum_{j=1}^N R_{i,j}(u_a) u_{a,j}(u_a) \end{aligned} \quad (4-12)$$

avec en négligeant l'indice a

$$\begin{aligned} DD_{i,j}(u) &= \sum_{n=0}^M N_{i,j,n} \frac{u^2 + \alpha^2}{u^2} \left\{ (u^2 + \alpha^2) \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} - \frac{\alpha^2}{u} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^M N_{i,j,n} \left\{ 2n\alpha^2(u^2 + \alpha^2) \left(-\frac{2}{u^3} \frac{\partial g_n}{\partial u} + \frac{3}{u^4} g_n \right) + 2n(2n-1) \frac{\alpha^4}{u^4} g_n \right\} \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\begin{aligned} D_{i,j}(u) &= \sum_{n=0}^M N_{i,j,n} \left\{ -2(u^2 + \alpha^2) \frac{\partial h_n}{\partial u} + \frac{\alpha^2(u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} - \frac{(\alpha^4 + 2u^4)}{u^4} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} \\ &+ \sum_{n=1}^M N_{i,j,n} \left\{ 2n \left(\frac{2\alpha^2 h_n}{u} - \frac{2\alpha^4}{u^4} \frac{\partial g_n}{\partial u} + \frac{3\alpha^4 + 2u^4}{u^5} g_n \right) + 2n(2n-1) \frac{(\alpha^4 - \alpha^2 u^2 + u^4)}{u^5} g_n \right\} \\ &- \sum_{n=1}^M N_{i,j,n-1} 2n(2n-1) \frac{1}{u} g_n \\ &+ 2 \sum_{n=0}^M X_{i,j,n} \left\{ -\alpha^2 \frac{(u^2 + \alpha^2)}{u^3} \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} + \frac{\alpha^4}{u^4} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} \\ &+ 2 \sum_{n=1}^M X_{i,j,n} \left\{ 2n \left(\frac{2\alpha^4 - u^4}{u^4} \frac{\partial g_n}{\partial u} + \frac{(u^4 - 3\alpha^4)}{u^5} g_n \right) + 2n(2n-1) \alpha^2 \frac{(u^2 - \alpha^2)}{u^5} g_n \right\} \\ &+ 2 \sum_{n=1}^M X_{i,j,n-1} \left\{ 2n \frac{(u^2 + \alpha^2)}{u^2} \left(\frac{\partial g_n}{\partial u} - \frac{1}{u} g_n \right) - 2n(2n-1) \frac{\alpha^2}{u^3} g_n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{i,j}(u) = & \sum_{n=0}^M X_{i,j,n} \left\{ \frac{2\alpha^2}{u} \frac{\partial h_n}{\partial u} - 3\alpha^2 \frac{(u^2 + \alpha^2)}{u^4} \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} + \frac{3\alpha^4 + 2u^4}{u^5} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} + \sum_{n=0}^M Y_{i,j,n} \left\{ \frac{1}{u} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} \\
& + \sum_{n=0}^M Y_{i,j,n+1} \left\{ \frac{\alpha^4}{u^4} \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} + \frac{(-u^4 + \alpha^2 u^2 - \alpha^4)}{u^5} \frac{\partial g_n}{\partial u} \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M X_{i,j,n} \left\{ 2n(2n-1) \frac{(-u^4 + 3\alpha^2(u^2 + \alpha^2))}{u^6} g_n \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M X_{i,j,n} \left\{ 2n \left(2 \frac{(u^2 - \alpha^2)}{u^2} h_n + 2 \frac{(3\alpha^4 - u^4)}{u^5} \frac{\partial g_n}{\partial u} - \frac{9\alpha^4}{u^6} g_n \right) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M X_{i,j,n-1} \left\{ 2n \left(-2h_n + 2 \frac{(\alpha^2 + u^2)}{u^3} \left(\frac{\partial g_n}{\partial u} - \frac{1}{u} g_n \right) \right) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M X_{i,j,n-1} 2n(2n-1) \frac{u^2 - 2\alpha^2}{u^4} g_n \\
& + \sum_{n=1}^M Y_{i,j,n+1} \left\{ 2n \left(2\alpha^2 \frac{(u^2 - \alpha^2)}{u^5} \frac{\partial g_n}{\partial u} + \frac{(u^4 - 3\alpha^2(u^2 - \alpha^2))}{u^6} g_n \right) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M Y_{i,j,n} \left\{ 2n \left(\frac{-2\alpha^2}{u^3} \frac{\partial g_n}{\partial u} + \frac{(2\alpha^2 - u^2)}{u^4} g_n \right) \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M Y_{i,j,n-1} \left\{ 2n(2n-1) \frac{1}{u^2} g_n \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M Y_{i,j,n} \left\{ 2n(2n-1) 2 \frac{(\alpha^2 - u^2)}{u^4} g_n \right\} \\
& + \sum_{n=1}^M Y_{i,j,n+1} \left\{ 2n(2n-1) \frac{(u^4 - 2\alpha^2 u^2 + \alpha^4)}{u^6} g_n \right\}
\end{aligned}$$

IV - 3. EQUATIONS D'EVOLUTION DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION DES IONS ET DES ELECTRONS

Nous avons défini pour les ions d'espèce a, le terme de source par $S_a(u_a, \xi_a) = J_a \times S'_a(u_a) \times F_a(\xi_a)$ (4-14)

avec

$$F_a(\xi_a) = \sum_{i=1}^N a_{i,a} M_i(\xi_a) \quad (4-14 \text{ bis})$$

où J_a est le courant d'injection des particules d'espèce a, c'est-à-dire le nombre de particules injectées dans 1 cm^3 de plasma durant une seconde. S'_a est de la forme (3-7)

$$S'_a(u_a) = b_{a,1} e^{-b_{a,2} u_a^2} (u_a^2)^{k_a} \quad (4-15)$$

$b_{a,1}$ et $b_{a,2}$ sont définis (voir équations 3-7 et 3-9) de façon à satisfaire aux deux relations

$$4 \pi \sum_{i=1}^N a_{i,a} I_{i,0} \int_0^\infty S'_a(u_a) u_a^2 du_a = 1 \quad (4-16)$$

$$4 \pi \sum_{i=1}^N a_{i,a} I_{i,0} \int_0^\infty S'_a(u_a) u_a^4 du_a = \overline{u_{a,s}^2} = \overline{v_{a,s}^2} - \alpha_a^2$$

où $\overline{v_{a,s}^2}$ est la vitesse quadratique moyenne d'injection des ions d'espèce a, reliée à l'énergie d'injection par $E_{a,s} = \frac{1}{2} m_a \overline{v_{a,s}^2}$

En utilisant les développements des pseudo-potentiels et de la fonction de distribution des particules d'espèce a, l'équation (2-2) peut être remplacée par N équations couplées entre elles mais ne dépendant plus que de u_a (4-12 et 4-14).

Pour l'état stationnaire ($\frac{\partial f_a}{\partial t} = 0$)

$$\begin{aligned}
0 = & \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial u_a^2} \{ DD_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) \} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial u_a} \{ D_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) \} \\
& + \sum_{j=1}^N R_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) + \frac{2u_a^2}{\Gamma_a} J_a S'_a(u_a) a_{i,a} N_{i,i,0}
\end{aligned} \tag{4-17}$$

Les couplages entre les différents modes sont faibles. En effet $N_{i,j,0} = 0$ si i est différent de j , le couplage se fait soit par des termes en α_a^2 , soit par les anisotropies des pseudo-potentiels (4-13). De ce fait il est plus commode de réécrire l'équation (4-17) sous la forme

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial^2}{\partial u_a^2} \{ DD_{i,i}(u_a) U_{a,i}(u_a) \} + \frac{\partial}{\partial u_a} \{ D_{i,i}(u_a) U_{a,i}(u_a) \} \\
& + R_{i,i}(u_a) U_{a,i}(u_a) + z_i(u_a)
\end{aligned} \tag{4-18}$$

avec

$$\begin{aligned}
z_i(u_a) = & \frac{2u_a^2}{\Gamma_a} J_a S'_a(u_a) a_{i,a} N_{i,i,0} + \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial u_a^2} \left[DD_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial u_a} \left[D_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) \right] + R_{i,j}(u_a) U_{a,j}(u_a) \right\}
\end{aligned} \tag{4-19}$$

Pour les électrons l'utilisation des coordonnées hyperboliques (u, ξ) n'apporte aucun avantage (voir paragraphe IV-1). On pourrait dans le système de coordonnées (v, μ) supposer que la fonction de distribution est à variables séparables, utiliser une approximation analytique pour le premier mode de BEN-DANIEL /55/ et /39/ en tenant compte de la dépendance en v de μ_c

$$\mu_c = \left[1 - 1/R_{\text{eff}}^{(v)}(e) \right]^{1/2} \quad (4-20)$$

et employer une procédure similaire aux équations (4-4) à (4-10) pour calculer les contributions électroniques aux anisotropies des pseudo-potentiels.

Toutefois le potentiel ambipolaire a pour effet de rendre la fonction de distribution des électrons presque isotrope. D'autre part dans les collisions entre particules d'espèces a et b, les anisotropies des pseudo-potentiels jouent un rôle négligeable dès que v_a et v_b sont très différentes (2-10). Il est donc raisonnable de supposer que les collisions ion-électron, électron-ion et électron-électron sont bien représentées par les seules parties isotropes des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH.

Pour ces raisons nous avons négligé la contribution des électrons aux anisotropies des pseudo-potentiels et réduit l'équation des électrons à la seule variable v en utilisant les hypothèses classiques de FOWLER-RANKIN /10/ d'isotropisation des pseudo-potentiels et de séparabilité des variables dans la fonction de distribution, en tenant compte de l'effet du potentiel ambipolaire par l'introduction du rapport de miroir effectif

$R_{\text{eff}}^{(v)}(e)$. L'équation des électrons est alors donnée par les formules (2-2, 2-15 et 2-22), avec un terme de source de la forme

$$S_e(v) = J_e b_{e,1} e^{-b_{e,2} v^2} (v^2)^{k_e} \quad (4-21)$$

avec

$$4 \pi \int_0^\infty S_e(v) v^2 dv = J_e \quad (4-22)$$

$$4 \pi \int_0^\infty S_e(v) v^4 dv = J_e \frac{v_e^2}{e^6} \quad (4-23)$$

Dans l'expression des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH (2-4 et 4-10), nous avons pris pour $\log_e (\Lambda_{ab})$ soit l'expression classique (2-6) soit une expression très semblable à celle de FUTCH et C^{ie} /20/ (2-25).

$$\log_e (\Lambda_{ab}) = \log_e \left\{ \frac{m_a m_b}{m_a + m_b} \frac{2\alpha\lambda_D}{e^2} C_{v_{a,b}} \right\} - \frac{1}{2} \quad (4-24)$$

$$, \alpha = 1/237, v_{a,b} = \left[\max (\overline{v_a^2}, \overline{v_b^2}) \right]^{1/2}$$

sauf si a ou b sont des électrons, alors $v_{a,e} = v_{e,a} = (\overline{v_a^2})^{1/2}$ /19/ (et Chapitre II).

Pour un plasma composé de s espèces d'ions, nous avons donc à résoudre $N \times s + 1$ équations ne dépendant que d'une variable. Nous les résolvons par un schéma numérique "implicite" (voir annexe IV).

Pour éviter de calculer le potentiel ambipolaire, nous avons utilisé un procédé très semblable à celui employé par FOWLER-RANKIN /8/. Nous fixons le potentiel ambipolaire et à chaque itération augmentons ou diminuons arbitrairement le courant d'injection des électrons si la condition de neutralité de charge du plasma n'est pas vérifiée. Dans la pratique, nous avons retenu seulement les cas où après convergence

$$\left(\sum_{i=1}^S Z_i J_i \right) / J_e = 1 \pm 0,05 \quad (4-25)$$

Enfin pour pouvoir résoudre numériquement les équations il est nécessaire que les quantités intervenant dans ces équations soient sans dimension . Pour cela nous avons défini

1) Une vitesse caractéristique en cm/s, v_c qui est la racine carrée de la vitesse quadratique moyenne de l'état initial des électrons $v_c = (\overline{v_{e,0}^2})^{1/2}$.

2) Une densité caractéristique n_c en cm^{-3} qui est donnée par $n_c = 10^5 \left(\sum_{i=1}^S Z_i J_i \right)^{1/2} (E_{e,0})^{3/4}$ où $\sum_{i=1}^S Z_i J_i$ est le nombre de charges plus injectées dans un cm^3 de plasma pendant une seconde et $E_{e,0}$ est l'énergie en keV des électrons à l'état initial $E_{e,0} = \frac{1}{2} m_e \overline{v_{e,0}^2}$

3) Un temps caractéristique en seconde $t_c = n_c / \left(\sum_{i=1}^S Z_i J_i \right)$

Notons qu'avec ces grandeurs caractéristiques $1/\Gamma_a$ (voir Chapitre II) s'exprime

$$1/\Gamma_a = (1/GG_a) v_c^3 / (t_c n_c) \quad (4-26)$$

avec /3/

$$1/GG_a = 3,6229 \times 10^{-7} (m_a/m_H)^2 / Z_a^4 \quad (4-27)$$

IV - 4. RESOLUTION DES EQUATIONS POUR DES PLASMAS DE DEUTERIUM

Afin d'estimer l'effet des anisotropies des pseudo-potentiels et des fonctions de distribution, nous avons fait un certain nombre de tests pour des plasmas composés de Deutérons et de Tritons. Nous avons pris comme conditions initiales $J_D = 10^{17}$, $R = 3$, $E_{D,s} = 100$ keV. Nous avons supposé que la vitesse d'injection des électrons était égale à celle des ions, ce qui est le cas lorsque l'injection des particules se fait sous forme de neutres /20/.

En prenant le terme de source des ions dans le premier mode de BEN-DANIEL (4-14) $F_a(\xi_a) = M_1(\xi_a)$, nous avons fait varier $M' = M+1$, le nombre de polynomes de Legendre dans l'expression des pseudo-potentiels (4-8) et N le nombre de fonctions de BEN-DANIEL dans la représentation de la fonction de distribution des ions (4-3). Tous les résultats que nous présentons dans ce chapitre ont été obtenus avec des tests de conservation de l'énergie et de la densité (Voir Annexe 4). En prenant pour $\log_e(\Lambda_{ab})$ l'expression classique (2-6), nous avons trouvé (voir table I) : pour $\overline{n\tau} = n_D^2/J_D$ en $\text{cm}^3/\text{seconde}$ les valeurs suivantes: $\overline{n\tau} = 0,847 \times 10^{13}$ pour $M' = 1$, $N = 1$, $\overline{n\tau} = 1,4 \times 10^{13}$ pour $M' = 4$, $N = 1$; $\overline{n\tau} = 1,36 \times 10^{13}$ pour $M' = 6$, $N = 1$ et $\overline{n\tau} = 0,891 \times 10^{13}$ pour $M' = 1$ et $N = 3$ ou 6 . Lors des calculs similaires effectués sans test de conservation de l'énergie /54/ mais avec un test de conservation de la densité, nous avons trouvé les mêmes résultats sauf pour $M' = 1$, $N = 1$ où nous avons

alors $\pi\tau = 0,895 \times 10^{13}$.

En prenant pour $\log_e (\Lambda_{ab})$ l'expression quantique (4-24), nous avons trouvé /20/ des augmentations de $\pi\tau$ de 7%, ainsi pour $M = 1, N = 1, \pi\tau = 0,9216 \times 10^{13}$.

Lorsque dans notre modèle nous prenons $M' = 1, N = 1$, nos hypothèses sont très proches de celles de FOWLER-RANKIN /10/. En fait en prenant pour $\log_e (\Lambda_{ab})$ l'expression classique (2-6) ils ont trouvé (avec leur correction de 20% enlevée)/10/ $\pi\tau = 10^{13}$. Leur valeur est environ 15% supérieures à la nôtre, nous pouvons expliquer cela par le fait que la fonction propre de l'opérateur de Legendre qui a pour valeur propre $1/\log_{10} R_{\text{eff}}\left\{\frac{v}{D}\right\}$ est plus anisotrope que $M_1 (\xi_D)$.

Nos résultats montrent clairement que le nombre de fonctions propres de BEN-DANIEL dans la représentation des fonctions de distribution a une faible influence. Nous donnons en Figure 10 l'allure pour $N = 6, M' = 1$ de $U_{D,j}(\xi_D)$ pour $j = 1, 2, 3$.

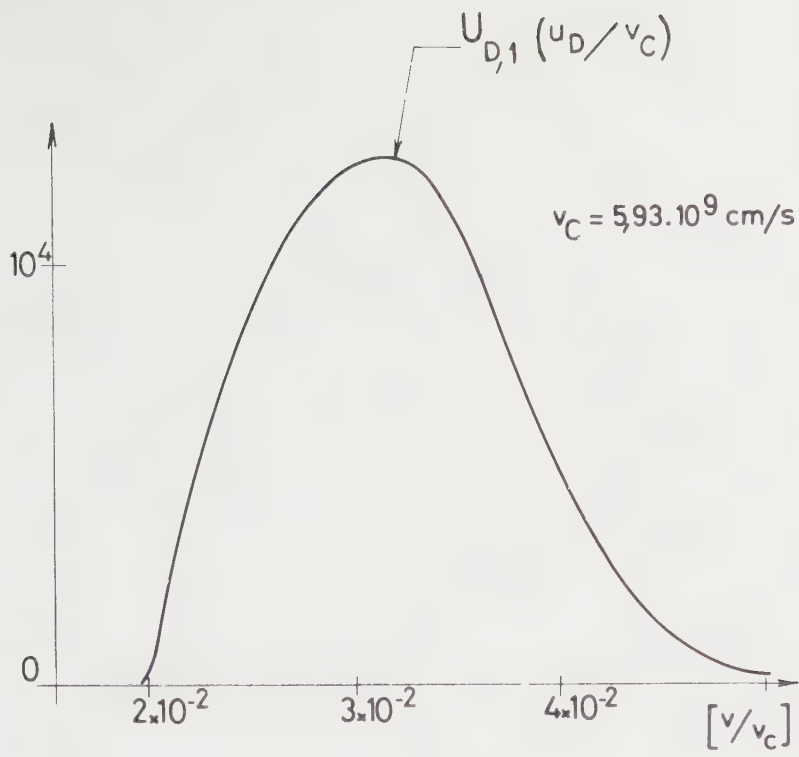
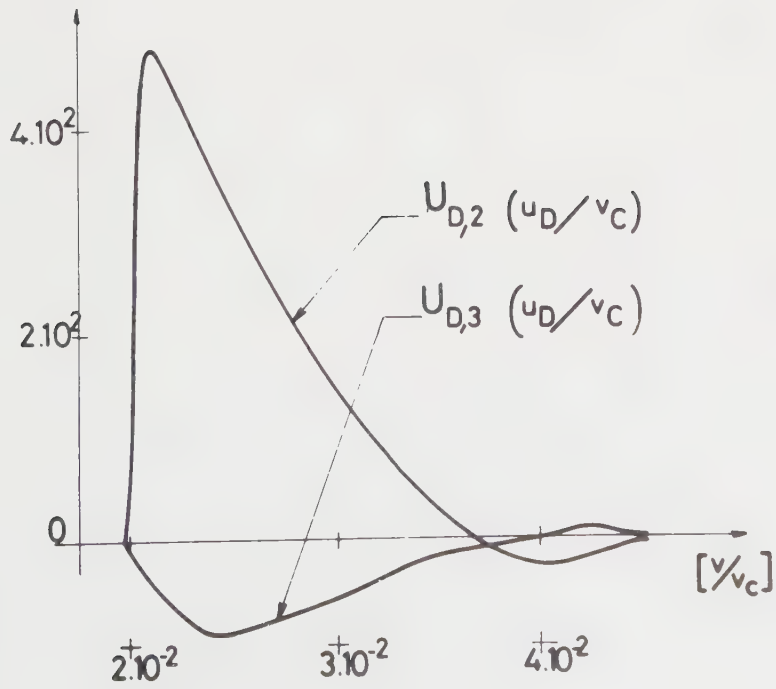


Figure : 10 a



Nos valeurs de $\overline{n\tau}$ augmentent faiblement si la fonction de distribution est représentée par plusieurs modes de BEN-DANIEL. Cela est en accord avec les solutions de l'équation de F.P. en deux dimensions /3/ et /33/ qui avaient permis d'établir que la fonction de distribution était légèrement plus anisotrope que le premier mode de BEN-DANIEL, ce qui normalement est cause d'une augmentation de $\overline{n\tau}$. Toutefois nous devons remarquer que nos résultats et ceux obtenus dans les coordonnées (v, μ) ne sont pas exactement comparables. En effet, le premier mode de BEN-DANIEL obtenu en coordonnées (u_a, ξ_a) est moins anisotrope que le premier mode de BEN-DANIEL en coordonnées (v, μ) pour une condition critique μ_c dépendant de v .

Nous avons constaté que les anisotropies des pseudo-potentiels amenaient des augmentations importantes de $\overline{n\tau}$. L'interprétation physique de ce phénomène est simple (voir paragraphe IV - 1) et est en accord avec les résultats obtenus pour une seule équation de F.P. /3/, /1/ (voir chapitre II). Nous avons vu que les développements en polynômes de Legendre des pseudo-potentiels de ROSENBLUTH convergeaient très vite (2-10). Pour $M = 6$ nous avons trouvé que quel que soit v $|H'_{D,10}(v)| < (1/300) |H'_{D,0}(v)|$

Les pseudo-potentiels de diffusion convergent encore plus vite à cause de la présence du terme en $1/(4j^2 - 1)$ (2-10).

Enfin bien que l'effet de l'anisotropie des sources ait déjà été testée, nous avons essayé trois types d'anisotropie de source $F_D(\xi_D)$ (voir Figure 11)

- a) $F_D (\xi_D)$ dans le premier mode de BEN-DANIEL
- b) $F_D (\xi_D)$ anisotrope près de l'hyperboloïde de perte
- c) $F_D (\xi_D)$ anisotrope loin de l'hyperboloïde de perte.

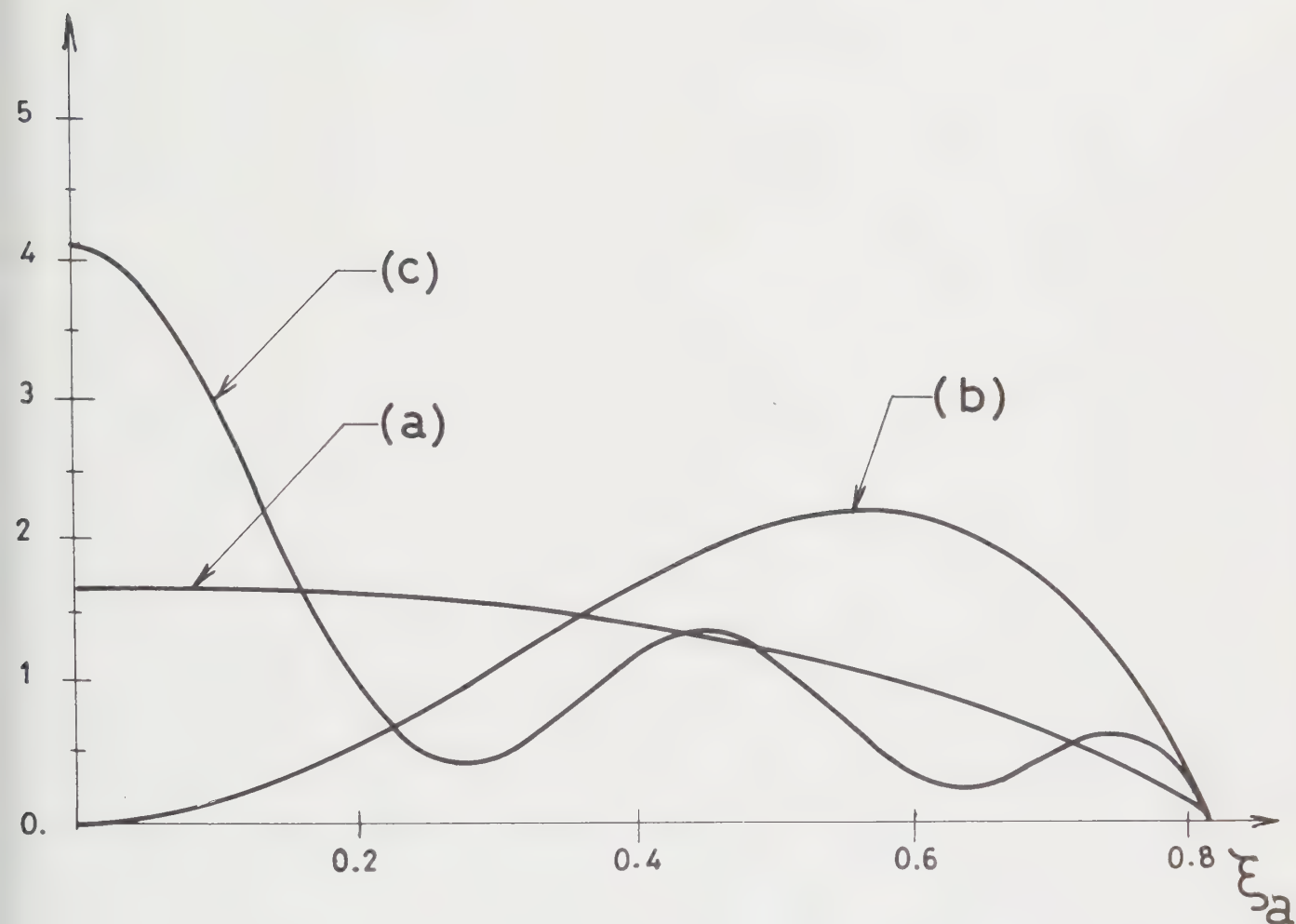
En prenant pour $\log_e (\Lambda_{ab})$ l'expression quantique (4-24), nous trouvons pour

$$M' = 1, N = 6, R = 3, j = 10^{17}.$$

$$a) \overline{n\tau} = 0,965 \times 10^{13}$$

$$b) \overline{n\tau} = 0,731 \times 10^{13}$$

$$c) \overline{n\tau} = 1,05 \times 10^{13}$$



ANISOTROPIES ANGULAIRES DE LA SOURCE DES IONS

Figure : 11

IV - 5. RESOLUTION DES EQUATIONS POUR DES PLASMAS DE DEUTERIUM, TRITIUM ET HELIUM 4.

Nous avons cherché à évaluer plus précisément le facteur d'amplification de puissance d'un réacteur utilisant pour combustibles du Deuterium et du Tritium. Pour cela nous avons résolu pour les Deutérons et les Tritons deux équations de F.P. en tenant compte des anisotropies des pseudo potentiels de ROSENBLUTH et pour les électrons une équation suivant le modèle de FOWLER-RANKIN /10/ (et Chapitre II). Nous avons tenu compte de l'augmentation de Q due au réchauffement des particules par les α créées par réactions thermonucléaires (1-3), en utilisant la formule (2-24) donnée par KUO-PETRAVIC et C^{ie} /19/. Nous avons pris pour $\log_e (\Lambda_{ab})$ l'expression quantique (4-24); et posé $J_T = 0,62 J_D$ afin d'obtenir $n_D \neq n_T$ /20/.

Le calcul du taux de réaction moyen étant lui-même un problème non trivial, nous avons utilisé un procédé original basé sur une représentation analytique des sections efficaces de collisions thermonucléaires /26/ (et Annexe III).

L'augmentation de $\overline{n\tau}$ due à la représentation de la fonction de distribution par plusieurs fonctions de BEN-DANIEL ayant été trouvée négligeable, (voir table 1), nous avons gardé dans ces calculs uniquement le premier mode $N = 1$. Pour représenter les pseudo-potentiels de ROSENBLUTH, nous avons gardé six polynômes de Legendre d'ordre pair :

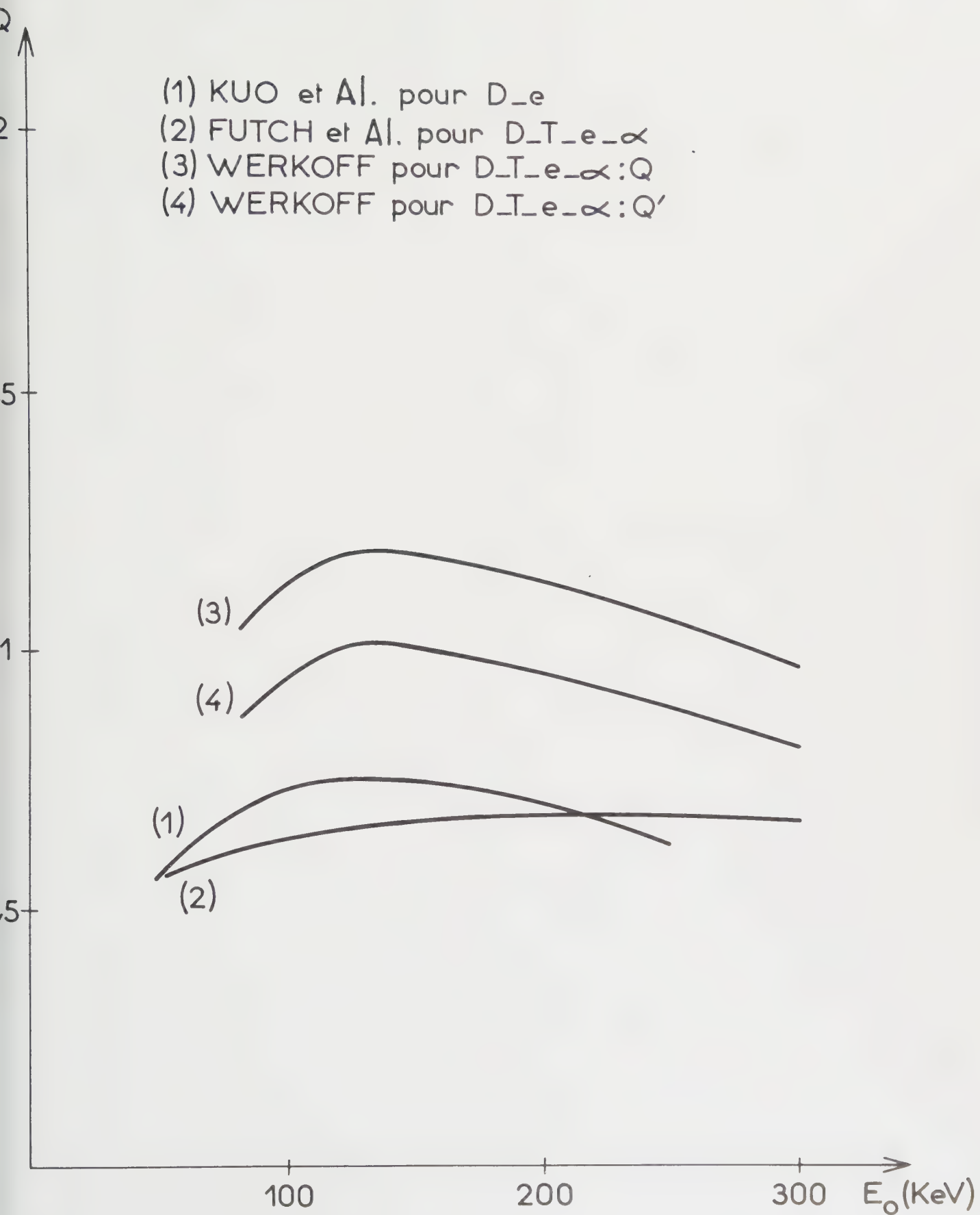
Toutes les évaluations de Q ont été faites jusqu'à ce jour en prenant l'énergie obtenue par une réaction thermonucléaire égale à 22,4 MeV (1-3, 1-4). Cependant les particules α sont

créées avec une énergie de 3,52 MeV (1-3), mais quittent le réacteur en ayant abandonné la plus grande partie de leur énergie aux autres particules chargées. KUO-PETRAVIC et al /19/ indiquent que les particules α abandonnent 95 % de leur énergie. Pour cette raison nous avons supposé que les particules α quittaient le réacteur avec une énergie négligeable et avons pris $E_F = 18,86$ MeV. Cependant afin de pouvoir comparer nos résultats avec ceux obtenus précédemment /19,20/ nous donnerons deux expressions pour le facteur d'amplification de puissance : Q obtenu en prenant $E_F = 22,4$ MeV et Q' obtenu en prenant $E_F = 18,86$ MeV.

Nous donnons en Figure 12 les valeurs de Q obtenues pour un rapport de miroir de 3, en fonction de l'énergie E_0 d'injection du Deutérium et du Tritium. Nous donnons aussi les valeurs de Q obtenues par KUO-PETRAVIC et al /19/ et FUTCH et al /20/.

Bien que les valeurs de $\overline{n\tau}$ obtenues en tenant compte des anisotropies des pseudo potentiels de ROSENBLUTH soient environ 40% plus fortes que celles obtenues à partir des hypothèses de FOWLER-RANKIN (voir table 1), nos valeurs de Q sont environ 70% supérieures à celles de FUTCH et al . Ce désaccord peut en partie s'expliquer d'une part parce que nos valeurs de $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ (voir Figure 14 Annexe III) sont environ 10% supérieures à celles utilisées par FUTCH et al et d'autre part parce que dans l'expression (2-29) l'accroissement de Q_α dû aux particules α augmente quand $\overline{n\tau}$ et Q_0 augmentent.

Figure 12



CONCLUSIONS

Nous avons trouvé (Chapitre III) que dans le cas des plasmas à électrons chauds le potentiel ambipolaire et l'énergie des ions devraient être largement inférieurs aux valeurs données par les estimations théoriques antérieures /11/, /23/. Nous avons également trouvé une condition d'inversion du potentiel ambipolaire plus pessimiste que celle donnée par KAUFMAN /11/. Ces résultats ajoutés à ceux obtenus précédemment /48/ sur les effets des "bouchons" H.F semblent confirmer l'impossibilité /23/ d'obtenir des bilans énergétiques favorables avec des plasmas à électrons chauds.

Dans le cas des plasmas à ions chauds (Chapitre IV) nous avons constaté que les évaluations des pertes dues aux collisions Coulombiennes sont sensiblement moins sévères si l'on tient compte des anisotropies des coefficients de freinage et de diffusion intervenant dans l'équation de FOKKER-PLANCK. Cet effet favorable augmente la probabilité d'obtenir un bilan énergétique positif pour un réacteur thermonucléaire fonctionnant à partir d'une configuration à miroirs. Toutefois les valeurs du facteur d'amplification de puissance que nous avons obtenues étant encore assez faibles, l'avenir thermonucléaire des configurations magnétiques à miroirs reste incertain et va dépendre au cours des prochaines années des différents procédés de récupération.

TABLE I

EXPRESSIONS DE $\overline{n\tau}$

Cette table est inspirée d'une table similaire donnée par KUO-PETRAVIC et al /19/. Tous les résultats ont été obtenus pour des plasmas à ions chauds créés par dissociation de neutres injectés avec une énergie E_0 . Les sources sont toujours supposée dans le premier mode de BEN-DANIEL. Toutes les valeurs de $\overline{n\tau}$ exprimées en cm^3/s doivent être multipliées par $E_0^{3/2} \log_{10} R / \log_e D$.

Auteurs	Références		$\overline{n\tau}$
ROBERTS et CARR	3	(3)	1,62 10^{12}
BING et ROBERTS	30	(3)	8,1 10^{11}
POST	1		3,5 10^{12}
BEN-DANIEL et ALLIS	31		1,18 10^{12}
FOWLER et RANKIN	10	(1)	4,18 10^{11}
KUO-PETRAVIC et al	19		4,6 10^{11}
	19	(2)	6,4 10^{11}
WERKOFF	Chapitre IV M'=1, N=1		3,54 10^{11}
	M'=6, N=1		5,68 10^{11}
	M'=1, N=6		3,73 10^{11}
	M'=6, N=3		5,92 10^{11}

-
- (1) FOWLER et RANKIN ayant constaté que dans les calculs de BEN-DANIEL et ALLIS /31/ pour une seule espèce d'ions, le terme $\gamma_{111} \neq 1(2-20)$ augmentant $\overline{n\tau}$ de 20%, ont multiplié arbitrairement leurs résultats par 20%. Ainsi que KUO-PETRAVIC et al /19/ nous avons enlevé cette correction.
- (2) L'effet du potentiel sur les ions étant annulé.
- (3) Résultats obtenus en absence de termes de sources.

ANNEXE I

TRANSFORMATION DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK EN COORDONNEES
HYPERBOLIQUES

Nous utiliserons pour obtenir l'équation (4-2) les formules (22 à 31) de la référence /21/. Nous négligerons d'écrire l'indice a ainsi que toutes les quantités égales à zéro. Pour retrouver l'équation de F.P. en coordonnées (v, μ) (équation 2-7) il suffit de poser $\alpha^2 = 0$, $v = u$ et $\mu = \xi$.

Pour alléger les notations nous poserons

$$R = u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 = v_{\perp}^2 \quad (A-1-1)$$

Nous devons d'abord calculer les coefficients de la métrique :

$$\begin{aligned} a_{11} &= (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)/R & a^{11} &= (u^2 + \alpha^2)/u^2 \\ a_{22} &= u^2 (u^2 + \alpha^2)/R & a^{22} &= (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)/u^4 \\ a_{33} &= R & a^{33} &= 1/R \\ a_{12} &= a_{21} = \alpha^2 \xi u/R & a^{21} &= a^{12} = -\alpha^2 \xi/u^3 \\ & & a^{1/2} &= u^2 \end{aligned} \quad (A-1-2)$$

Nous devons ensuite calculer les coefficients de Christoffel :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \alpha^2 (1 - \xi^2)/uR & \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^1 = -\alpha^2 \xi/R \\ \Gamma_{22}^1 &= -u(u^2 + \alpha^2)/R & \Gamma_{11}^2 &= -\alpha^2 \xi (1 - \xi^2) u^2 R \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = (-u^2 \xi^2 + u^2 + \alpha^2 \xi^2 + \alpha^2)/uR & \Gamma_{22}^2 &= \xi(u^2 + \alpha^2)/R \\ \Gamma_{33}^1 &= -R/u & \Gamma_{33}^2 &= \xi R/u^2 \end{aligned} \quad (A-1-3)$$

Nous calculons ensuite le vecteur contravariant T avec

$$T^\mu = a^{\mu\nu} \frac{\partial h}{\partial q^\nu}$$

$$\begin{aligned} T^1 &= \{(u^2 + \alpha^2)/u^2\} \frac{\partial h}{\partial u} - \{\alpha^2 \xi/u^3\} \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ T^2 &= \{-\alpha^2 \xi/u^3\} \frac{\partial h}{\partial u} + \{(u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)/u^4\} \frac{\partial h}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (A-1-4)$$

Puis le tenseur contravariant S avec :

$$S^{\mu\nu} = a^{\mu\omega} a^{\nu\tau} \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial q^\omega \partial q^\tau} - \Gamma_{\omega\tau}^\sigma \frac{\partial g}{\partial q^\sigma} \right\}$$

$$S^{11} = \{(u^2 + \alpha^2)^2/u^4\} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \{\alpha^2(u^2 + \alpha^2)/u^5\} \frac{\partial g}{\partial u} + \{-2\alpha^2 \xi (u + \alpha^2)/u^5\}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} + \{3\alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2)/u^6\} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \{\alpha^4 \xi^2/u^6\} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}$$

$$S^{22} = \{\alpha^4 \xi^2/u^6\} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \{(u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 \xi^2 - \alpha^4 \xi^2/u^7)\} \frac{\partial g}{\partial u} +$$

$$\{-2\alpha^2 \xi (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)/u^7\} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} + \{\xi (-u^4 + u^4 \xi^2 + 2\alpha^2 u^2 - 3\alpha^2 u^2 \xi^2 + 3\alpha^4 \xi^2)/u^8\}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} + \{(u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)^2/u^8\} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}$$

$$S^{33} = \frac{1}{Ru} \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\xi}{Ru^2} \frac{\partial g}{\partial \xi}$$

$$S^{12} = S^{21} = \{-\alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2)/u^5\} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \{\alpha^4 \xi/u^6\} \frac{\partial g}{\partial u} +$$

$$\{(u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 + 2\alpha^4 \xi^2)/u^6\} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi}$$

$$+ \{(-u^4 + u^4 \xi^2 - \alpha^2 u^2 - 3\alpha^4 \xi^2)/u^7\} \frac{\partial g}{\partial \xi} +$$

$$\{-\alpha^2 \xi (u^2 - u^2 \xi^2 + \alpha^2 \xi^2)/u^7\} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}$$

(A-1-5)

L'équation de FOKKER-PLANCK a pour expression :

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial t} = - a^{-1/2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} (a^{1/2} f T^\mu) + \frac{1}{2} a^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial q^\mu \partial q^\nu} (a^{1/2} f S^{\mu\nu})$$

$$+ \frac{1}{2} a^{-1/2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} (a^{1/2} \Gamma_{\omega\mu}^\nu f S^{\mu\omega})$$

(A-1-6)

Les deux premiers groupes de termes s'obtiennent de façon évidente, nous expliciterons ici seulement les termes du 3ème groupe :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial u} \{ u^2 f (\Gamma_{11}^1 S^{11} + 2 \Gamma_{21}^1 S^{21} + \Gamma_{22}^1 S^{22} + \Gamma_{33}^1 S^{33}) \} = \\ \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial u} (u^2 f D_u) \\ \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \{ u^2 f (\Gamma_{22}^2 S^{22} + 2 \Gamma_{21}^2 S^{21} + \Gamma_{11}^2 S^{11} + \Gamma_{33}^2 S^{33}) \} = \\ \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (u^2 f D_\xi) \quad (A-1-7) \end{aligned}$$

Nous trouvons que :

$$\begin{aligned} D_u = \{ \alpha^2 (u^2 + \alpha^2) / u^5 \} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \{ -(\alpha^4 + 2 u^4) / u^6 \} \frac{\partial g}{\partial u} + \\ \{ -2 \alpha^4 \xi / u^6 \} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} + \{ \xi (3 \alpha^4 + 2 u^4) / u^7 \} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \\ \{ (\alpha^4 \xi^2 - \alpha^2 u^2 \xi^2 - u^4 + u^4 \xi^2) / u^7 \} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} \\ D_\xi = \{ -3 \alpha^2 \xi (u^2 + \alpha^2) / u^6 \} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \{ \xi (3 \alpha^4 + 2 u^4) / u^7 \} \frac{\partial g}{\partial u} + \\ \{ -(2 u^4 + 2 \alpha^2 u^2 + 9 \alpha^4 \xi^2) / u^8 \} \frac{\partial g}{\partial \xi} + \{ \xi (u^4 - u^4 \xi^2 - 2 \alpha^2 u^2 + \\ 3 \alpha^2 u^2 \xi^2 - 3 \alpha^4 \xi^2) / u^8 \} \frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \{ 2(u^4 - u^4 \xi^2 + \alpha^2 u^2 + 3 \alpha^4 \xi^2) / u^7 \} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial \xi} \quad (A-1-8) \end{aligned}$$

En reportant (A-1-8) dans (A-1-6) nous obtenons l'équation (4-2) .

ANNEXE II

EXPRESSION ANALYTIQUE DU POTENTIEL AMBIPOLAIRE

Si nous supposons que les pseudo potentiels sont isotropes et les fonctions de distribution à variables séparées, en absence de potentiel électrostatique les pertes des particules d'espèce a s'expriment (voir équation 2-16).

$$\frac{1}{\Gamma_a} \frac{dn_a}{dt} = - \frac{2\pi}{\log_{10} R} \int_0^\infty \frac{1}{v} \frac{\partial g}{\partial v} V_{a,o}(v,t) dv \quad (A-2-1)$$

Prenons pour $\log_e D$ l'expression classique (2-6), rappelons que Γ_a est proportionnel à $1/m_a^2$, considérons que le plasma est formé d'électrons et d'ions une fois chargés. Alors compte tenu des définitions des pseudo-potentiels (voir équation 2-10)

$$\frac{dn_a}{dt} = - \frac{C_1}{\log_{10} R m_a^2} \int_0^\infty dv V_{a,o}(v) \left[\frac{1}{v} \int_0^v \{V_{i,o}(v') + V_{e,o}(v')\} v'^2 dv' \right. \quad (A-2-2)$$

$$\left. - \frac{1}{3v^3} \int_0^v \{V_{i,o}(v') + V_{e,o}(v')\} v'^4 dv' + \frac{2}{3} \int_0^\infty \{V_{i,o}(v') + V_{e,o}(v')\} v'^4 dv' \right]$$

Si nous considérons que les pertes des particules d'espèce a sont dues aux seules collisions des particules a entre elles

$$\frac{dn_a}{dt} = \frac{-C_2}{\log R} \frac{1}{m_a^2 (\overline{v_a^2})^{3/2}} \eta \quad (A-2-3)$$

où η est un coefficient sans dimension (voir formules 62 et 63 de /25/) que nous supposons indépendant de l'espèce de particules considérées.

$$\eta = (\overline{v_a^2})^{3/2} \int_0^\infty dv V_{a,o}(v) \left[\frac{1}{v} \int_0^v V_{a,o}(v') v'^2 dv' - \frac{1}{3v^3} \int_0^v V_{a,o}(v') v'^4 dv' + \frac{2}{3} \int_0^\infty V_{a,o}(v') v'^4 dv' \right] \quad (A-2-4)$$

où $\overline{v_a^2}$ est la vitesse quadratique moyenne des particules d'espèce a :

$$\overline{v_a^2} = \int_0^\infty V_{a,0}(v) v^4 dv / \int_0^\infty V_{a,0}(v) v^2 dv \quad (\text{A-2-5})$$

$$\text{avec } E_a = \frac{1}{2} m_a \overline{v_a^2}$$

En l'absence de potentiel ambipolaire les pertes des particules d'espèce a sont donc de la forme :

$$\frac{dn_a}{dt} = \frac{-C}{m_a^{1/2} E_a^{3/2}} \quad (\text{A-2-6})$$

Si les pertes d'une espèce: par exemple les électrons sont supérieures à celles des ions, KAUFMAN /10/ a supposé que le seul effet du potentiel ambipolaire Φ_0 qui se créait, était de confiner les électrons d'énergies inférieures à $e \Phi_0$. Le potentiel ambipolaire est alors donné par :

$$\frac{1}{m_i^{1/2} E_i^{3/2}} = \frac{1}{m_e^{1/2} E_e^{3/2}} e^{-e\Phi_0/E_e} \quad (\text{A-2-7})$$

Cette formule conduit dans le cas des plasmas à ions chauds à des valeurs du potentiel ambipolaire environ trois fois inférieures à celles obtenues par des résolutions numériques d'équations de F.P. /10/ et dans le cas des plasmas à électrons chauds (voir Chapitre III et /22/) à des valeurs environ vingt fois inférieures.

D'autre part nous trouvons d'après la formule (A-2-7) que le potentiel ambipolaire s'annule pour :

$$m_i^{1/2} E_i^{3/2} = m_e^{1/2} E_e^{3/2} \quad (\text{A-2-8})$$

Cette expression diffère d'un facteur 1, 8 avec l'expression (3-14) obtenue numériquement.

Pour tenter d'expliquer ces désaccords, nous avons utilisé une expression analytique pour $V_{a,0}(v)$ /56/

$$V_{a,0}(v) = \frac{n}{2\pi} \frac{v}{(\bar{v}_a^2)^2} e^{-2 v^2 / \bar{v}_a^2} \quad (A-2-9)$$

Nous avons supposé que dans les collisions electron-ion et ion-électron les ions étaient froids vus des électrons. C'est-à-dire que dans la formule (A-2-4), pour les collisions ion-électron nous avons fait tendre vers zéro les intégrales $\int_0^v$ et les intégrales $\int_v^\infty$ vers $\int_0^\infty$ et l'inverse pour les collisions électron-ion. Alors :

$$\frac{dn_i}{dt} = \frac{-c_1}{\log_{10} R} \frac{1}{m_i^2} \left\{ \int_0^\infty dv \frac{1}{v} V_{i,0} \frac{\partial g_{i,0}}{\partial v} + \frac{2}{3} \int_0^\infty V_{i,0}(v) dv \int_0^\infty V_{e,0}(v) v dv \right\} \quad (A-2-10)$$

où $g_{i,0}$ est la partie isotrope du pseudo-potentiel de ROSENBLUTH qui représente les collisions ion-ion. BEN-DANIEL et ALLIS ont montré que /25/

$$\int_0^\infty dv \frac{1}{v} V_{i,0}(v) \frac{\partial g_{i,0}}{\partial v} \neq \frac{n^2}{4\pi (\bar{v}_i^2)^{3/2}} \quad (A-2-11)$$

Avec les définitions (A-2-9) nous avons :

$$\frac{2}{3} \int_0^\infty V_{i,0}(v) dv \int_0^\infty V_{e,0}(v) v dv = \frac{n^2}{6 \times 2^{3/2} \bar{v}_i^2 (\bar{v}_e)^{1/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4\pi} \quad (A-2-12)$$

Nous voyons que dans l'expression des pertes ioniques la contribution des électrons est négligeable devant celle des ions

tant que $(v_i^2) \ll (v_e^2)$ (voir paragraphe II-3)

Au contraire pour les électrons :

$$\frac{dn}{dt}e = \frac{-c1}{\log_{10} R} \frac{1}{m_e^2} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{n^2}{(v_e^2)^{3/2}} + \int_0^\infty dv V_{e,o}(v) \left(\frac{n}{v} - \frac{nv_j^2}{3v^3} \right) \right] \quad (A-2-13)$$

Comme nous avons supposé les ions froids:

$$v_i^2 / v^2 \ll 1$$

$$\frac{dn}{dt}e = \frac{-c1}{\log_{10} R} \frac{n^2}{4\pi m_e^2} \left(\frac{1}{(v_e^2)^{3/2}} + \frac{1}{(v_e^2)^{3/2}} \frac{\pi}{2^{3/2}} \right) \quad (A-2-14)$$

Nous voyons donc que pour les pertes électroniques l'effet des collisions électron-ion est légèrement supérieur à celui des collisions électron-électron.

La condition d'inversion du potentiel ambipolaire devient alors :

$$E_e = \left[1 + \pi / 2^{3/2} \right]^{2/3} E_i \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3} \quad (A-2-15)$$

$$E_e \neq 1,65 E_i \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/3}$$

Rappelons que numériquement nous avons trouvé 1,8 au lieu de 1,65 (équation 3-14).

Enfin si nous tenons compte de cette correction (A-1-7), le potentiel ambipolaire est donné approximativement par :

$$\frac{1}{m_i^{1/2} E_i^{3/2}} = \frac{1}{m_e^{1/2} E_e^{3/2} (1 + \pi / 2^{3/2})} e^{-e\phi_0/E} \quad (A-2-16)$$

Cette formule donne des valeurs du potentiel ambipolaire Φ_0 deux à trois fois plus faibles (selon le rapport de miroir qui n'intervient que dans A-2-16) que celles obtenues numériquement. On peut aisément expliquer ce désaccord en remarquant que dans (A-2-7) et (A-2-16), l'effet confinant du potentiel ambipolaire sur les particules d'énergies supérieures à $e \Phi_0$ est négligé.

ANNEXE III

TAUX MOYEN DE LA REACTION THERMONUCLEAIRE DEUTERIUM-TRITIUM

L'estimation du facteur Q nécessite le calcul du taux de réaction moyen $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ défini par :

$$(\overline{\sigma v})_{D,T} = \frac{1}{n_D n_T} \iint f_D(\vec{v}_D) f_T(\vec{v}_T) \sigma(v_r) v_r d\vec{v}_D d\vec{v}_T \quad (A-3-1)$$

où $v_r = |\vec{v}_D - \vec{v}_T|$ et où $\sigma(v_r)$ est la section efficace de collisions thermonucléaires. Si on admet que les deux fonctions ont une symétrie azimutale, il est nécessaire pour calculer $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ de résoudre une intégrale multiple d'ordre 5. Numériquement une telle intégrale demande beaucoup de temps, ROBERTS et CARR /3/ l'ont pourtant résolue. Il est cependant dommage que par la suite alors que l'évaluation de Q revêtait une importance bien plus critique qu'en 1962, tous les auteurs aient utilisé des procédures simplifiées.

FOWLER et RANKIN /10/ ont calculé un taux de réaction moyenne sur une seule fonction de distribution. KUO-PETRAVIC et al /19/ ont utilisé des fonctions de distribution maxwelliennes en v et isotropes ou au contraire très piquées en angles et par des changements de variables ils se ramènent à une intégrale simple à résoudre numériquement. Apparemment MARX (voir /20/) a calculé $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ en intégrant sur quatre variables ($v_D, v_T, \theta_D, \theta_T$ avec $\theta = \arccos(\mu)$). FUTCH et al /20/ intègrent numériquement sur trois variables en prenant des fonctions de distribution isotropes.

Une procédure a été mise au point par R. NAKACH /26/ qui permet de calculer analytiquement $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ pour des fonctions de distribution analytiques. Nous avons fait une adaptation de cette méthode dans le cas où (voir Chapitre 4) :

$$f_a(u_a, \xi_a) = U_{1,a}(u_a) M_1(\xi_a) \quad (\text{A-3-2})$$

où a est soit D , soit T . Dans ces coordonnées $(\overline{\sigma v})_{D,T}$ s'exprime en appelant $\phi = \phi_a - \phi_b$

$$(\overline{\sigma v})_{D,T} = \frac{4\pi}{n_D n_T} \int_0^\infty \int_0^\infty U_{1,D}(u_D) U_{1,T}(u_T) \int_{-\xi_c}^{\xi_c} \int_{-\xi_c}^{\xi_c} M_1(\xi_D) M_1(\xi_T) \int_0^\pi v_r \sigma(v_r) d\phi d\xi_D d\xi_T U_D^2 u_T^2 du_D du_T \quad (\text{A-3-3})$$

en rappelant que $v_a^2 = u_a^2 + \alpha_a^2$

$$v_r^2 = v_D^2 + v_T^2 - 2(v_D^2 - u_D^2 \xi_D^2)^{1/2} (v_T^2 - u_T^2 \xi_T^2)^{1/2} \cos \phi - 2 u_D u_T \xi_D \xi_T \quad (\text{A-3-4})$$

Les sections efficaces de collision D-T ont été tabulées à partir de mesures expérimentales et sont données en fonction de $E_{DT} = \frac{1}{2} m_D v_r^2$, énergie du deutéron incident dans le système du laboratoire où le triton est au repos. En appelant $x = E_{DT}$ (en keV)/100, nous avons un très bon accord (voir Fig. 13) entre les valeurs expérimentales et les valeurs obtenues par la formule :

$$\sigma(x) = \sum_{N=1}^3 b_N x / (1 + a_N x^2) \quad (\text{A-3-5})$$

avec $b_1 = -301,4166$, $b_2 = 562,875$ et $b_3 = -(b_2 + b_1)$

$a_1 = 0,9$, $a_2 = 1,1$ et $a_3 = 1,5$ et où $\sigma(x)$ est exprimé en barns (10^{-24} cm^2).

En écrivant :

$$x = \frac{1}{200} m_D (B - D) \text{ avec } B = v_D^2 + v_T^2 \text{ et}$$

$$D = 2(v_D^2 - u_D^2 \xi_D^2)^{1/2} (v_T^2 - u_T^2 \xi_T^2)^{1/2} \cos \phi + 2 u_D u_T \xi_T \xi_D$$

, nous pouvons faire un développement de Taylor autour de B et en

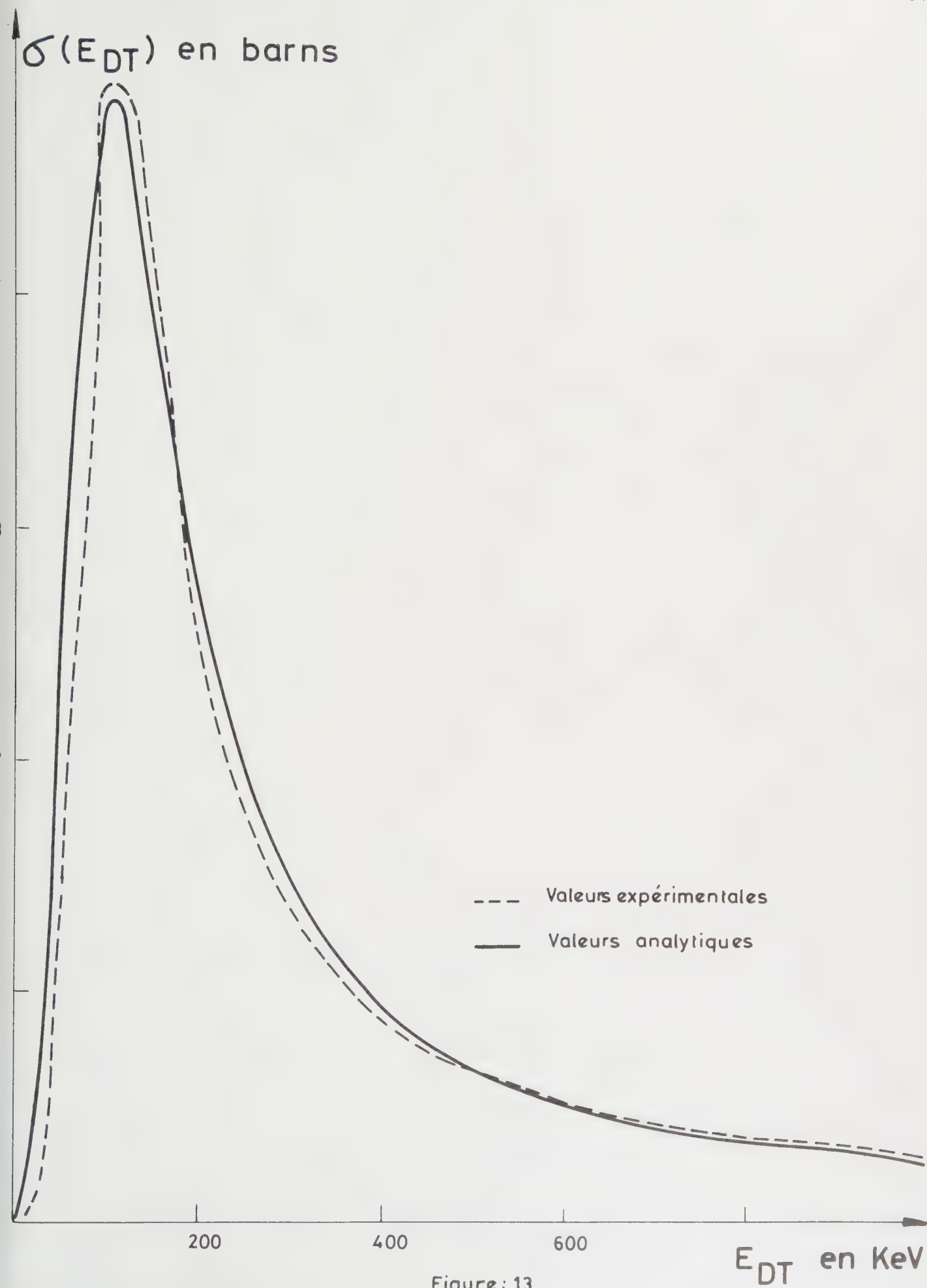


Figure : 13

appelant :

$$Q_N^n(B) = \frac{B^n}{n!} \left(\frac{B^{3/2}}{1+a_N B^2} \right)^{(n)} b_N \quad (\text{A-3-6})$$

, réécrire l'équation (A-3-3) :

$$(\overline{\sigma v})_{DT} = 10^{-24} \sqrt{\frac{200}{m_D}} \frac{4\pi}{n_D n_T} \sum_{N=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} Q_N^n(B) \int_{-\xi_C}^{\xi_C} \int_{-\xi_C}^{\xi_C} \int_0^{\pi} \left(\frac{-D}{B} \right)^n M_1(\xi_T) M_1(\xi_D) \\ U_{1,D}(u_D) U_{1,T}(u_T) d\phi d\xi_D d\xi_T u_D^2 u_T^2 du_D du_T \quad (\text{A-3-7})$$

A cause de $M_1(\xi) = M_1(-\xi)$ et de $\int_0^{\pi} \cos^{2P+1} \phi d\phi$, la contribution des termes d'ordre n impair, sera nulle. D'autre part à cause de la convergence rapide de la série en n /26/, nous nous arrêterons aux termes d'ordre 4 alors :

$$(\overline{\sigma v})_{DT} = 10^{-24} \sqrt{\frac{200}{m_D}} \frac{2\pi}{n_D n_T} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} U_{1,D}(u_D) U_{1,T}(u_T) u_D^2 u_T^2 \sum_{N=1}^3 \sum_{P=0}^2 Q_N^{2P}(B) \\ R_{2P}(u_D, u_T) du_D du_T \quad (\text{A-3-8})$$

$$\text{avec } Q_N^0(B) = b_N \frac{B^{3/2}}{1+a_N B^2}$$

$$Q_N^2(B) = b_N \frac{B^{3/2}}{8} \frac{3-26a_N B^2+3a_N^2 B^4}{(1+a_N B^2)^3} \quad (\text{A-3-9})$$

$$Q_N(B) = b_N \frac{1}{4!} \frac{B^{3/2}}{16} \frac{3-20a_N B^2+1010a_N^2 B^4-980a_N^3 B^6+35a_N^4 B^8}{(1+a_N B^2)^5}$$

$$\text{et } R_{2P}(u_D, u_T) = \int_{-\xi_C}^{\xi_C} \int_{-\xi_C}^{\xi_C} M_1(\xi_D) M_1(\xi_T) \int_0^{2\pi} \left(\frac{D}{B} \right)^{2P} d\phi d\xi_D d\xi_T$$

$$R_0 = 8\pi I_{1,0} \quad (\text{A-3-10})$$

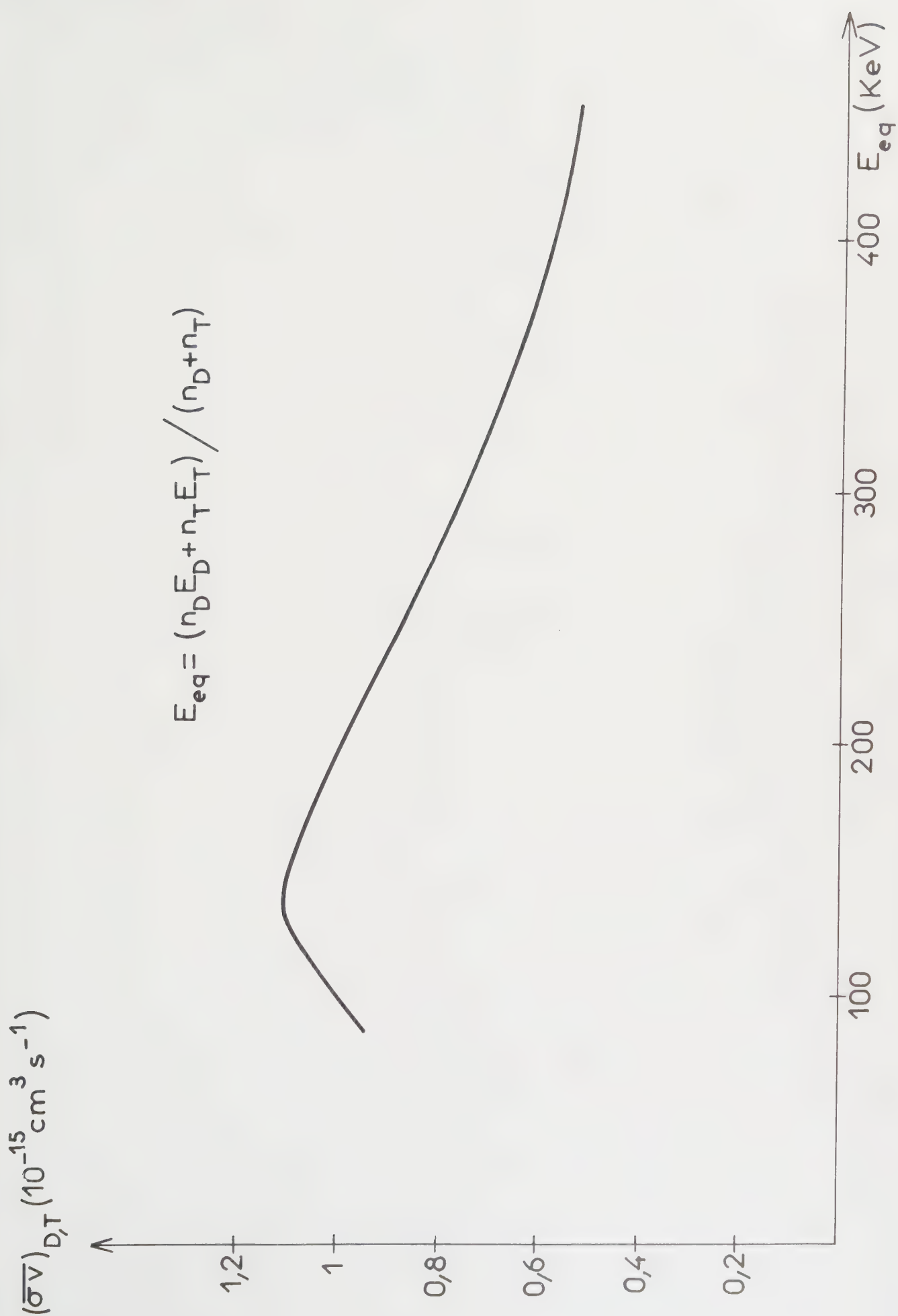
$$R_2 = \frac{16\pi}{(v_D^2+v_T^2)^2} \{ v_D^2 v_T^2 I_{1,0}^2 - I_{1,1} I_{1,0} (v_D^2 u_T^2 + v_T^2 u_D^2) + 3u_D^2 u_T^2 I_{1,1}^2 \}$$

$$R_4 = \frac{16 \pi}{(v_D^2 + v_T^2)^4} \{ 3 v_D^4 v_T^4 I_{1,0}^2 - 6 I_{1,1} I_{1,0} v_D^2 v_T^2 (u_D^2 v_T^2 + u_T^2 v_D^2) + 36 I_{1,1}^2 u_D^2 u_T^2 v_D^2 v_T^2 + 3 I_{1,0} I_{1,2} (v_T^4 u_D^4 + v_D^4 u_T^4) - 30 I_{1,2} I_{1,1} u_D^2 u_T^2 (v_D^2 u_T^2 + u_D^2 v_T^2) + 35 u_D^4 u_T^4 I_{1,2}^2 \}$$

Alors pour calculer $(\overline{\sigma v})_{DT}$ il ne nous reste plus qu'à intégrer numériquement sur u_D et u_T l'intégrale (A-3-8)

Nous donnons en Figure 14 les valeurs de $(\overline{\sigma v})_{DT}$ obtenues pour un rapport de miroir de 3.

Figure 14



ANNEXE IV
METHODES NUMERIQUES

A.IV. 1 - SCHEMAS NUMERIQUES EXPLICITES ET IMPLICITES

Pour résoudre numériquement une équation de la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = a \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) + S \quad (A-4-1)$$

satisfaisant à des conditions initiales de la forme $f(x=\infty, t) = 0$ et

$\frac{\partial f}{\partial x}(x=0, t) = 0$, nous discrétisons x suivant la méthode des différences cen-

trales et t suivant la méthode des différences "centrées en avant". Avec

des intervalles sur x et sur t constants : $t = j \Delta t$ et $x = n \Delta x$

l'équation (A-4-1) se réécrit :

$$\begin{aligned} (f_n^{j+1} - f_n^j) / \Delta t = (1 - \rho) \left[a (f_{n-1}^{j+1} - 2 f_n^{j+1} + f_{n+1}^{j+1}) / (\Delta x)^2 + b (f_{n+1}^{j+1} - f_{n-1}^{j+1}) / 2 \Delta x \right. \\ \left. + c f_n^{j+1} \right] + \rho \left[a (f_{n-1}^j - 2 f_n^j + f_{n+1}^j) / (\Delta x)^2 + b (f_{n+1}^j - f_{n-1}^j) / 2 \Delta x + c f_n^j \right] + S \end{aligned}$$

Si $\rho = 1$ le schéma numérique est entièrement explicite et doit pour être stable satisfaire aux conditions /37/ $\Delta t < |(\Delta x)^2 / 2a|$ et $\Delta t < |2\Delta x / b|$.

Si au contraire $\rho = 0$ le schéma est entièrement implicite et incondi-

nnellement stable, pour le résoudre on utilise la relation de récurrence

$$/37/ \quad f_n^{j+1} = f_{n+1}^{j+1} E_n + G_n \quad (A-4-3)$$

avec

$$E_n = \left[a / (\Delta x)^2 + b / (2\Delta x) \right] / \left[1 / \Delta t - c + 2 a / (\Delta x)^2 - E_{n-1} \{ a / (\Delta x)^2 - b / (2\Delta x) \} \right]$$

$$G_n = \left[+ f_n^j / \Delta t + G_{n-1} \{ a / (\Delta x)^2 - b / (2\Delta x) \} \right] / \left[1 / \Delta t - c + 2 a / (\Delta x)^2 - E_{n-1} \{ a / (\Delta x)^2 - b / (2\Delta x) \} \right] \quad (A-4-4)$$

$$f_{n=\infty} = 0, E_1 = 1 \text{ et } G_1 = 0$$

Des équations de la forme (A-4-1) mais en deux dimensions (x, y) , peuvent être discrétisées de la même façon (A-4-2). Cependant il n'est alors plus possible /3,33/ d'utiliser un schéma numérique complètement implicite et de ce fait il est nécessaire de satisfaire à des conditions de stabilité similaires à celles du problème à une dimension /37/.

A. IV. 2. QUELQUES PROBLEMES SPECIFIQUES AUX EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK.

Une des principales difficultés attachées à la résolution simultanée de plusieurs équations de F.P. couplées entre elles réside dans la très grande différence entre les vitesses quadratiques moyennes des ions des électrons. Pour éviter cette difficulté certains auteurs /44/ ont pris deux échelles de vitesse distinctes à pas constants. Nous avons pensé qu'il était préférable de procéder de même dans le cas des plasmas à électrons chauds (Chapitre III). En effet si le potentiel ambipolaire est négatif les vitesses des ions les plus chauds sont très largement inférieures aux vitesses des électrons les plus froids et les échelles des vitesses des deux espèces de particules sont totalement découplées. Dans les tests effectués en simulant par un V^* les effets de la H.F. nous doublons pour les très faibles vitesses des électrons, l'échelle de vitesse des électrons par celle des ions.

Toutefois, la plupart des auteurs/18, 19, 42, 20/(et chapitre IV) ont préféré prendre une seule échelle de vitesse avec un pas variable. Cette manière de procéder peut être une cause d'erreur notamment en ce qui concerne la conservation de l'énergie par les équations de F.P. En effet si on emploie la méthode des différences centrales pour définir les dérivées et la méthode des trapèzes pour effectuer les intégrations on s'aperçoit que

$$\int_0^{\infty} x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ f 2 x / \left(\frac{\partial x^2}{\partial x} \right) \right\} dx = - 2 \int_0^{\infty} x f dx \quad (A-4-5)$$

quand le pas de vitesse n'est pas constant $2 x \neq \frac{\partial x^2}{\partial x}$ et

$$\int_0^{\infty} x^2 \frac{\partial f}{\partial x} dx \neq 2 \int_0^{\infty} x f dx \quad (A-4-6)$$

Pour éviter cette difficulté nous avons toujours pris

$$\left| 2 x / \frac{\partial x^2}{\partial x} - 1 \right| < 2 \times 10^{-3} \text{ en posant } \text{lorsqu'on désire augmenter le pas}$$

$$x_{n+1} - 2 x_n + x_{n-1} < x_n/500 \quad (A-4-7)$$

Une autre difficulté particulière aux équations de F.P. réside dans la non linéarité de ces équations. Les coefficients de l'équation (A-4-1) sont non constants et dépendent (Chapitre II) des fonctions de distribution de toutes les espèces de particules. La façon la plus simple de linéariser ces équations est de calculer les coefficients à partir des fonctions de distribution prises à l'instant t . Cependant lorsqu'on emploie pour résoudre ces équations des schémas implicites et donc en prenant les fonctions de distribution à l'instant $t + \Delta t$, cette manière de procéder viole certaines propriétés conservatrices des équations de F.P. /57/ et peut être un obstacle à la résolution dépendante du temps quand le potentiel ambipolaire est calculé et que les temps de relaxation des ions et des électrons sont très différents. Pour éviter cette difficulté KILLEEN et FUTCH /42/ extrapolent les coefficients à l'instant $t + \Delta t$ à partir des coefficients calculés à partir des fonctions de distribution prises aux instants t et $t - \Delta t$. Notre étude dépendante du temps (Chapitre III) ayant été réalisée pour des plasmas à électrons chauds où les temps de relaxation sont très comparables, nous avons constaté qu'il était suffisant de prendre les coefficients calculés à l'instant t .

Les très grandes différences entre les temps et les vitesses caractéristiques des ions et des électrons, en imposant une échelle de vitesse à pas variable et en obligeant à tenir compte de quantités ayant parfois plusieurs ordres de grandeur de différence, peuvent être cause d'importantes erreurs numériques. C'est pour cela qu'il est nécessaire, afin de s'assurer que ces erreurs n'ont pas été commises de faire un certain nombre de vérifications. Ainsi lors de notre étude sur les plasmas à ions chauds (Chapitre IV), nous nous assurons que les méthodes numériques employées conservent bien la densité et l'énergie. Nos équations pour les ions et les électrons sont de la forme (4-18) :

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{a(x)f(x)\} + \frac{\partial}{\partial x} \{b(x)f(x)\} + c(x)f(x) + S(x) \quad (\text{A-4-8})$$

Pour nous assurer que la densité est bien conservée, nous intégrons sur x et vérifions que :

$$\int_0^{\infty} \{C(x) f(x) + S(x)\} dx \neq 0 \quad (A-4-9)$$

De même pour la conservation de l'énergie, après avoir multiplié par x^2 et intégré sur x , nous vérifions que :

$$2 \int_0^{\infty} f(x) \{a(x) - x b(x)\} dx + \int_0^{\infty} x^2 \{c(x) f(x) + S(x)\} dx \neq 0 \quad (A-4-10)$$

FOWLER et RANKIN /8,10/ ont fait une vérification semblable pour la conservation de l'énergie et se sont servis de la relation (A-4-9) pour ajuster les courants d'injection des deux espèces de particules. KUO PETRAVIC et C^{ie} /19/ et FUTCH et C^{ie} /20/, ont fait sur la conservation de l'énergie des vérifications bien plus complètes en calculant dans le détail les transferts d'énergie entre toutes les espèces de particules. A cause de la complexité de nos équations nous avons renoncé à faire un tel bilan. Toutefois pour les électrons nous avons cherché à savoir si les collisions électron-électron conservaient bien l'énergie en considérant dans les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ la seule partie qui représente les collisions électron-électron $a_{e,e}$ et $b_{e,e}$ et en vérifiant que :

$$2 \int_0^{\infty} f(x) \{a_{e,e}(x) - x b_{e,e}(x)\} dx \neq 0 \quad (A-4-11)$$

Cette relation est d'autant mieux vérifiée que le programme est près de converger /57/.

Enfin dans notre étude dépendante du temps (Chapitre III), nous avons séparé dans les équations (3-4) les termes qui conservaient la densité des termes de sources et de pertes. Dans un premier temps nous résolvons l'équation formée par les termes conservatifs en prenant les dérivées secondes à l'instant $t + \Delta t$ et les dérivées premières à l'instant t . En procédant ainsi la densité n'est réellement conservée que si Δt est suffisamment petit pour que les coefficients soient assez peu différents aux instants t et $t + \Delta t$.

+ Δt . La conservation de la densité nous permet de nous assurer que Δt que nous prenons comme étant une fraction du temps d'équipartition de l'énergie /36,44/ n'est ni trop grand ni trop petit. Dans un deuxième temps nous tenons compte des termes non conservatifs et calculons par une méthode de Newton la valeur du potentiel ambipolaire qui assure l'équilibre des pertes entre les deux espèces de particules.

A. IV. 3. CALCULS DES FONCTIONS DE BEN-DANIEL.

Les fonctions de BEN-DANIEL $M_j(\mu)$ (voir Chapitre II) sont des fonctions propres de l'opérateur de Legendre :

$$L_\mu \{M_j(\mu)\} = (1-\mu^2) \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \{M_j(\mu)\} - 2\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \{M_j(\mu)\} = -m_j(m_j+1)M_j(\mu) \quad (\text{A-4-12})$$

satisfaisant aux conditions initiales (2-17).

Bien que M. BRAMBILLA (non publié) ait résolu l'équation (A-4-12) par une méthode RUNGE-KNUTTA-MERSON, nous avons jugé préférable d'utiliser la méthode de BEN-DANIEL /25,58/. Sur l'intervalle $[0, 1[$ nous avons développé $M_j(\mu)$ en puissances paires de μ

$$M_j(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(m_j) \mu^{2l} \quad (\text{A-4-13})$$

, en partant dans (A-4-12) nous obtenons la formule de récurrence

$$a_{l+1}(m_j) = a_l(m_j) \{2l(2l+1) - m_j(m_j+1)\} / \{2(l+1)(2l+1)\} \quad (\text{A-4-14})$$

Pour l suffisamment grand $a_{l+1}/a_l \rightarrow 1$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} a_l(m_j) \mu^{2l} = a_N(m_j) \sum_{l=N+1}^{\infty} \mu^{2l} = a_N(m_j) \frac{\mu^{2(N+1)}}{1-\mu^2} \quad (\text{A-4-15})$$

Bien que les valeurs propres m_j aient été calculées point par point en fonction de μ_c /58/, nous avons jugé préférable de les recalculer en utilisant pour cela une méthode de Newton.

" VU ET PERMIS D'IMPRIMER

MARSEILLE, LE 2. 2. 1973

LE PRÉSIDENT,

F. BOREL -H

REFERENCES

- / 1/ POST R.F., Nucl. Fusion, Suppl. P^t 1(1962) p 99.
- / 2/ FOWLER T.K., Nucl. Fusion 9 (1969) p 3.
- / 3/ ROBERTS S.E., CARR M.L., University of California Rep^t.
UCRL-5651-T (1960).
- / 4/ GOTT Yu. B., IOFFE M.S., TELKOVSKY V.G., Nucl. Fusion,
Suppl. Pt 3 (1962) P. 1045.
- / 5/ COENSGEN F.H., CUMMINS W.F., FINLAYSON V.A., NEXSSEN W.E.,
SIMONEN T.C., Madison , IAEA Conference, 2 (1971) P 721.
- / 6/ LAUNOIS D., LECOUSTEY P., TACHON J., KESNER J., CHATELIER M.,
5th European Conference on Controlled Fusion and Plasma
Physics (1972) P. 83.
- / 7/ Report of the Euratom Controlled Fusion Advisory Group on
open adiabatic configurations and radio frequency plugging
EUR-CEA-FC- 628_ AG (1971).
- / 8/ FOWLER T.K. et RANKIN M., Plasma Phys. (J. Nucl. Energy.
Part c) 4. (1962) P.311.
- / 9/ FOWLER T.K. et RANKIN M. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy
Part c) 6 (1964) P.513.
- /10/ FOWLER T.K. et RANKIN M. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy
Part c) 8 (1966).P. 121.
- /11/ KAUFMAN A.M. (1956) U.S. Atomic Energy Report TID-7520
2, 387.
- /12/ WATSON C.J.H. et KUO-PETRAVIC L.G. Phys. Review Letters
Vol. 20 N° 22 (1968) P.1231
- /13/ CONSOLI T., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion
Research (Proc. Conf. Culham 1965) 2, IAEA (1966) Vienne
P 483.

- /14/ POST R.F. in Nucl. Fusion Reactors (Proc. Int. Conf. Culham, 2.1., (1965) P 88.
- /15/ MARCUS F.B., SWEETMAN D.R., CORDEY J.G., CHUYANOV V.A., Nuclear Fusion 11 N06 (1971) P 661.
- /16/ POST R.F., Phys. Rev. Letters 18 (1967) P 232.
- /17/ LOGAN B.A., LICHTENBERG A.J., LIEBERMAN M.A. - Bull. Am. Phys. Soc. 15 (1970) P 1432.
- /18/ CORDEY J.G., WATSON C.J.H. V^e Eur. Conf. on Cont. Fusion & Plasma Physics (1972) P.98
- /19/ KUO-PETRAVIC L.G., PETRAVIC M. et WATSON C.J.H. Proc. Int. Conf. on Nucl. Fusion Reactors, Culham, England (1969) P.2-4.
- /20/ FUTCH A.H., HOLDREN J.P., KILLEEN J. et MIRIN A.A.. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy Part C) 14 (1972) P.211.
- /21/ ROSENBLUTH M.N., MAC DONALD W.M. et JUDD D.L. (1957) Phys. Rev. 107, 1.
- /22/ WERKOFF F. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy Part C) 14 (1972) P.897.
- /23/ CANOBBIO E., DE BARBIERI O. et GIUFFRE S. 4th European Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics (1970) P.78.
- /24/ BARDET R. DUPAS L., GORMEZANO C., MELIN G. (1972) Rapport EUR-CEA- FC N° 653.
- /25/ BEN-DANIEL D.J. et ALLIS W.P. Plasma Phys. (J. Nucl. Energy Part C) 4 (1962) p 31.
- /26/ NAKACH R., WERKOFF F. (à soumettre pour publication)
- /27/ GALBRAITH D.L., KAMMASH T. Nucl. Fusion 11 (1971) P 575.
- /28/ HECKROTTE W., HISKES J.R. Nucl. Fusion 11 (1971) P 471.
- /29/ DELCROIX J.L., Physique des Plasmas Tome 1 DUNOD, Paris 1963.
- /30/ BING G.F., ROBERTS J.E. Phys. Fluids 4 (1961) P. 1039.
- /31/ BEN DANIEL D.J., ALLIS W.P., Plasma Phys. (J, Nucl. Energy Part C) 4 (1962) P 79

- /32/ MARX K.D. Phys. Fluids 13 (1970) P 1335.
- /33/ KILLEEN J. and MARX K.D. in Methods in Computational Physics (Ed. ALBER, FERNBACH and ROTENBERG) (1970) Vol. 9 P 422 Academic Press New York.
- /34/ BRAMBILLA M., CANOBBIO E., 2e Coll. H F SACLAY, Vol. II, (1968) P. 637.
- /35/ MONTGOMERY D., TIDMAN D. "Plasma Kinetic Theory" McGraw Hill Book Company (1964).
- /36/ SPITZER L. " Physics of Fully Ionized Gases" 2nd Ed. Interscience Publishers, Inc. New York (1962).
- /37/ RICHTMYER R.D. et MORTON K.W."Difference Methods for initial value problems", Interscience, (1967) New York.
- /38/ GARREN A., RIDDELL R.J., SMITH H.L., BING G.F., HENRICH L.R., NORTHROP T.G. et ROBERTS J.E.. 2nd United Nations International Conference on the Peaceful uses of Atomic Energy (United Nations, New York 1958) Vol. 31 p 63.
- /39/ HOLDREN J.D. Nucl. Fusion Vol. 12 N° 2 (1971) P 267.
- /40/ JUDD D., MAC DONALD W. et ROSENBLUTH M.N. Wash-289, (1955) P.158
- /41/ ROSE D.J. Nucl. Fusion 9 (1969) P 183.
- /42/ KILLEEN J. and FUTCH A.H. J. Comput. Phys. 2 (1968) P.236.
- /43/ SIVUKHIN D.V. Reviews of Plasma Physics (Ed. Leontovich M.A.) Consultants Bureau, New York (1966) P.93.
- /44/ FISHER D.L., MC NAMARA B. et MASON D.W. Proc. Int. Conf. on Plasma Confined in Open-Ended Geometry (Gatlinburg, Texas) (1967) P. 280.
- /45/ HASTE G.R. et LAZAR N.H. Plasma Physics Vol. 14 (1972) P. 729.
- /46/ KESNER J. EUR-CEA-FC - 611

- /47/ ALIEV Y.M., SILIN V.P., WATSON C. Soviet Physics JETP
Vol. 23 N° 4 (1966) P.620.
- /48/ LICHTENBERG A.J., MELIN G. Rapport EUR-CEA-FC 656 (1972).
- /49/ JEAGER F., LICHTENBERG A.J. et LIEBERMAN M.A. . Plasma Phs.
(à paraître) et El. Res. Lab., Univ. of Calif. Berkeley,
Memorandum M-305 (1971).
- /50/ LIEBERMAN M.A., LICHTENBERG A.J. Plasma Phys. (à paraître)
et El. Res. Lab., Univ. Of Calif., Berkeley Memorandum M-306
(1971).
- /51/ CANOBBIO E. Nucl. Fusion 9 (1969) P 27.
- /52/ CANOBBIO E. Nucl. Fusion 9 (1969) P 267.
- /53/ BRAMBILLA M., WERKOFF F., 4th Eur. Conf. on Controlled Fusion
and Plasma Physics (1970) P 80.
- /54/ WERKOFF F., 5th Eur. Conf. on Controlled Fusion and Plasma
Physics (1972) p. 86.
- /54^{bis}/ WERKOFF F. (à soumettre pour publication à Plasma Physics)
- /55/ CORDEY J.G. Phys. Fluids 14 (1971) p 1407.
- /56/ POST R.E. ROSENBLUTH N.M. Physics of Fluids 9 1966 P 730.
- /57/ WHITNEY J.C. J. Comput. Phys. Vol. 6 N° 3 (1970) p 483.
- /58/ BEN-DANIEL D.J. et CARR W. UCRL 5859 (1960).

